



Universidade Federal de Minas Gerais

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
Escola de Engenharia

---

**CONTROLE PREDITIVO ROBUSTO BASEADO EM MODELO APLICADO  
A SISTEMAS LINEARES COM SALTOS MARKOVIANOS**

---

**ROSILEIDE DE OLIVEIRA LOPES**

ORIENTADOR:

**Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares**

COORIENTADORES:

**Prof. Dr. Eduardo Mazoni Andrade Marçal Mendes**

**Prof. Dr. Leonardo Antônio Borges Tôres**

04 de dezembro de 2019



Universidade Federal de Minas Gerais  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
Escola de Engenharia

---

**CONTROLE PREDITIVO ROBUSTO BASEADO EM MODELO APLICADO  
A SISTEMAS LINEARES COM SALTOS MARKOVIANOS**

---

**ROSILEIDE DE OLIVEIRA LOPES**

Tese apresentada à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Doutora em Engenharia Elétrica na área de Controle e Automação.

**ORIENTADOR:**

**Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares**

**COORIENTADORES:**

**Prof. Dr. Eduardo Mazoni Andrade Marçal Mendes**

**Prof. Dr. Leonardo Antônio Borges Tôres**

**LOCAL:**

**Belo Horizonte**

**DATA: 04 de dezembro de 2019**

L864c

Lopes, Rosileide de Oliveira.

Controle preditivo robusto baseado em modelo aplicado a sistemas lineares com saltos Markovianos [recurso eletrônico] / Rosileide de Oliveira Lopes. - 2019.

1 recurso online (xxiii, 63 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Reinaldo Martinez Palhares.

Coorientadores: Eduardo Mazoni Andrade Marçal Mendes, Leonardo Antônio Borges Tôrres.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 57-63.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Sistemas lineares - Teses. 3. Markov, Processos de - Teses. 4. Controle robusto - Teses. 5. Controle preditivo - Teses. I. Palhares, Reinaldo Martinez. II. Mendes, Eduardo Mazoni Andrade Marçal. III. Tôrres, Leonardo Antônio Borges. IV. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. V. Título.

CDU: 621.3(043)

TESE DE DOUTORADO Nº 318

**CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO APLICADO A  
SISTEMAS LINEARES COM SALTOS MARKOVIANOS**

**Rosileide de Oliveira Lopes**

DATA DA DEFESA: 04/12/2019



**"Controle Preditivo Baseado em Modelo Aplicado a Sistemas Lineares com Saltos Markovianos"**

**Rosileide de Oliveira Lopes**

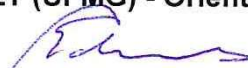
Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 04 de dezembro de 2019.

Por:



Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares  
DELT (UFMG) - Orientador




Prof. Dr. Eduardo Mazoni Andrade Marçal Mendes  
DELT (UFMG) - coorientador



Prof. Dr. Leonardo Antônio Borges Tôres  
DELT (UFMG) - Coorientador



Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val  
DSE (UNICAMP)



Prof. Dr. Roberto Kawakami Harrop Galvão  
IEES (ITA)



Prof. Dr. Luciano Antônio Frezzatto Santos  
DELT (UFMG)



Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos  
DELT (UFMG)





*Para meus pais Antonio e Maria, para os meus irmãos Alarico, Amazildes e Lind Lillian e para as minhas avós Amazildes e Maria de Lourdes.*



## AGRADECIMENTOS

---

Agradeço a Deus pela vida, saúde e energia para alcançar meus objetivos.

Agradeço ao meu orientador prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares e aos meus coorientadores prof. Dr. Eduardo Mazoni Andrade Marçal Mendes e prof. Dr. Leonardo Antônio Borges Tôres pela oportunidade, por acreditarem em mim, pela paciência, compreensão, pelos ensinamentos e por serem exemplos de dedicação e excelência acadêmica. Muito obrigada!

Agradeço ao meu marido Alessandro pelo seu amor, pelas dicas e parceria de trabalho.

Aos colegas do D!FCOM, de modo especial à Fúlvia, Guilherme, Heitor, Iury, Klenilmar, Luiz, Matheus, Murilo, Pedro, Rodrigo, Tiago e Wagner, pelo companheirismo, pelas discussões produtivas e pela amizade construída.

Agradeço aos meus pais e irmãos pelo amor que nos une e pelo incentivo.

Agradeço à Universidade Federal de Itajubá - Campus Itabira, especialmente aos colegas da Matemática pelo tempo que me foi concedido para a realização do doutorado.



*"... now I remembered that the real world was wide and that a varied field of hopes and fears, of sensations and excitements, awaited those who had the courage to go forth into it's expanse, to seek real knowledge of life amidst it's perils."*

Jane Eyre - Charlotte Bronte.



## RESUMO

---

Esta tese apresenta técnicas de controle preditivo robusto baseado em modelo aplicadas a sistemas lineares com saltos Markovianos a tempo discreto. Dois cenários de controle são tratados. No primeiro cenário desenvolve-se uma solução de controle que minimiza o valor esperado de um custo quadrático de horizonte infinito. Como subproduto nesta etapa, obtém-se estabilidade em média quadrática para dois casos: i) sem restrições e, ii) com restrições rígidas na entrada de controle e no estado. No segundo cenário de controle, trata-se da minimização do valor esperado de um custo quadrático de horizonte finito. Neste caso, considera-se a presença de ruído aditivo estocástico e contempla-se também restrições que são impostas sobre o segundo momento do estado e da variável de controle. Para ambos os cenários são apresentados experimentos numéricos que ilustram as técnicas propostas.

**Palavras-chave:** Sistemas lineares com saltos Markovianos; controle robusto; controle preditivo baseado em modelo; ruído aditivo; desigualdades matriciais lineares.

## ABSTRACT

---

In this thesis, robust model predictive control techniques applied to discrete-time Markov jump linear systems are introduced. Two control scenarios are addressed. In the first scenario, it is developed a control solution that minimizes the expected value of an infinite-horizon quadratic cost. As a byproduct, mean square stability is obtained under two cases: i) without constraints, and ii) with constraints on control input and state. The second control scenario considers the minimization of the expected value of quadratic finite-horizon cost. This scenario considers not only stochastic additive noise, but also constraints that are imposed on the second moment of both state and control. Numerical experiments illustrate the results for both scenarios.

**Keywords:** Markovian jump linear systems; robust control; model predictive control; additive noise; linear matrix inequalities.



## SUMÁRIO

---

1	INTRODUÇÃO	1
	Introdução	1
	1.1 MPC aplicado a sistemas lineares com saltos Markovianos . . .	3
	1.2 Objetivos . . . . .	4
	1.3 Estrutura do Texto . . . . .	4
	1.4 Notação . . . . .	5
2	REVISÃO DE MÉTODOS MPC DE SISTEMAS LINEARES EM TER- MOS DE LMIS	7
	2.1 MPC para sistemas lineares a tempo discreto . . . . .	7
3	MPC ROBUSTO DE HORIZONTE INFINITO APLICADO A MJLS	13
	3.1 Formulação do Problema . . . . .	13
	3.2 Ações de controle . . . . .	15
	3.3 Caso sem restrições . . . . .	16
	3.4 Caso com restrições . . . . .	22
	3.5 Extensão do MPC robusto para o caso multi-passos . . . . .	27
	3.6 Estudo de Casos . . . . .	28
	3.6.1 Caso 1 . . . . .	29
	3.6.2 Caso 2 . . . . .	30
	3.6.3 Caso 3 . . . . .	31
	3.7 Produção Relacionada . . . . .	32
4	MPC ROBUSTO DE HORIZONTE FINITO APLICADO A MJLS SU- JEITO A RUÍDO ADITIVO	35
	4.1 Formulação do Problema . . . . .	35
	4.2 Resultados auxiliares . . . . .	37
	4.3 Caso sem restrições . . . . .	39
	4.4 Caso com restrições . . . . .	43
	4.5 Exemplo . . . . .	46
	4.5.1 Caso sem restrições . . . . .	47
	4.5.2 Caso com restrições . . . . .	47
	4.6 Produção Relacionada . . . . .	48
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	53
	5.1 conclusões . . . . .	53
	5.2 Proposta de continuidade . . . . .	54
	5.2.1 Restrições probabilísticas . . . . .	54
	5.2.2 Atraso no tempo . . . . .	54
	5.2.3 Estados de Markov não observáveis . . . . .	55
	5.2.4 Extensão para sistemas não lineares . . . . .	55
	BIBLIOGRAFIA	57



## NOMENCLATURA

---

<b>Símbolo</b>	<b>Descrição</b>
$A^{-1}$	Inversa da matriz $A$ (se existir).
$A'$	Transposta da matriz $A$ .
$A > 0$ ( $A \geq 0$ )	Matriz $A$ é simétrica definida (semidefinida) positiva.
$\mathcal{I}$	Matriz identidade de dimensões apropriadas.
$0$	Matriz nula de dimensões apropriadas.
$n_{\xi}$	Número inteiro positivo.
$\Theta$	Espaço de estados da Cadeia de Markov.
$\{\theta(k); k = 0, 1, \dots\}$	Estados da cadeia de Markov
$p_k(i, j)$	Probabilidade de transição do estado $i$ para o estado $j$ no instante $k$ .
$\mathcal{P}_k = [p_k(i, j)]_{i, j \in \Theta}$	Matriz de probabilidade de transição no instante $k$ .
$n_{\theta}$	Número inteiro positivo.
$\mathbb{R}^n$	Espaço $n$ -dimensional.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto de matrizes reais de dimensão $n \times m$ .
$\mathcal{C}_o$	Fecho convexo.
$*$	Elemento simétrico de uma matriz.
$x(k + n k)$	Valor predito do vetor de estados $x$ em um tempo futuro $k + n$ baseado na informação disponível no instante de tempo $k$ .
$u(k + n k)$	Valor predito da entrada de controle $u$ em um tempo futuro $k + n$ baseado na informação disponível no instante de tempo $k$ .
$\theta(k + n k)$	Valor predito do modo de Markov $\theta$ em um tempo futuro $k + n$ baseado na informação disponível no instante de tempo $k$ .
$\ x\ _Q$	Forma quadrática: $x'Qx$ .
$V(k + n k), n \geq 1$	Função de Lyapunov dada por: $x'(k + n k)Px(k + n k)$ , na qual a matriz de Lyapunov $P > 0$ , é constante .
$\tilde{V}(k + n k), n \geq 1$	Função de Lyapunov dada por: $x'(k + n k)P(\xi(k)) \times x(k + n k)$ , na qual a matriz de Lyapunov $P(\xi(k)) > 0$ varia com o instante $k$ .

$\mathcal{V}(k+n k), n \geq 1$	Função de Lyapunov dada por: $x'(k+n k)P_{\xi(k+n)}(\theta(k+n k))x(k+n k)$ , na qual a matriz de Lyapunov $P_{\xi(k+n)}(\theta(k+n k)) > 0$ varia com o instante $k$ e é dependente dos modos de Markov.
$\bar{\mathcal{V}}(k+n), n \geq 1$	Função de Lyapunov dada por: $x'(k+n k)W_{\xi(k+n)}^{-1}(\theta(k+n k))x(k+n k)$ , na qual a matriz de Lyapunov $W_{\xi(k+n)}^{-1}(\theta(k+n k)) > 0$ varia com o instante $k$ , é dependente dos modos de Markov e do $n$ -ésimo passo.
$\mathbb{E}_k[V]$	Valor esperado de $V$ condicionado à informação disponível no instante de tempo $k$ .
$\mathbb{E}_{k+n k}[V]$	Valor esperado de $V$ no instante $k+n$ condicionado à informação disponível no instante de tempo $k$ .
$\mathbb{E}[V]$	Valor esperado de $V$ usando todas as informações disponíveis.
$\mathbb{P} = [p(i,j)]_{i,j \in \Theta}$	Matriz de probabilidade de transição.
$\lambda_{\min}\{A\}$	Autovalor mínimo de uma matriz $A$ .
$\mathcal{S}^n$	Subespaço linear normado de $\mathbb{R}^{n \times n}$ de matrizes simétricas tais que $\{U \in \mathbb{R}^{n \times n} : U = U'\}$
$\mathcal{S}^{n0}$ ( $\mathcal{S}^{n+}$ )	Cone convexo fechado (aberto) de matrizes semidefinidas (definidas) positivas.
$\mathcal{S}^{n+}$	Conjunto formado por um número $n_\theta$ de matrizes tais que $\mathcal{S}^{n+} = \{U = (U_1, \dots, U_{n_\theta}) : U_i \in \mathcal{S}^{n+}, i \in \Theta\}$ .
$\mu_{k+n k} \in \Theta$	Distribuição de probabilidade no instante $k+n$ baseado na informação disponível até o instante $k$ .
$\mathbb{E}_{x_k, \mu_k}[\cdot]$	Representação de $\mathbb{E}[\cdot   x(k) = x_k, \theta(k) \sim \mu_{k k}]$ .
$M$	Sequência ou conjunto $\{M(1), \dots, M(n_\theta)\}$ .
$\mathcal{E}_i(M)$	Operador sobre o conjunto $M$ .
$\mathbb{1}_{\{\theta(n+1)=i\}}$	Função Delta de Dirac.

## ACRÔNIMOS

---

**MPC** : Controle preditivo baseado em modelo (do inglês, *Model Predictive Control*).

**RHC**: Controle de horizonte retrocedente (do inglês, *Receding Horizon Control*).

**MHC**: Controle por horizonte móvel (do inglês, *Moving Horizon Control*).

**MJLS**: Sistemas lineares com saltos Markovianos (do inglês, *Markovian Jump Linear Systems*).

**LMI**: Desigualdade matricial linear (do inglês, *Linear Matrix Inequality*).

**MJLPV**: Sistemas lineares de parâmetros variantes com saltos Markovianos (do inglês, *Markovian Jump Linear Parameter Varying systems*).



LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Algoritmos de MPC robusto . . . . .	2
Figura 2	Ilustração dos parâmetros $A_{\xi(k)}(i)$ e $B_{\xi(k)}(i)$ para MJLS contendo três modos de Markov. . . . .	14
Figura 3	Resposta ao estado: Figure 1) $x_1(k)$ e Figure 2) $x_2(k)$ . A linha contínua indica a resposta média ao estado utilizando o controlador III em [47] e a linha pontilhada indica a resposta média ao estado utilizando (54). . . . .	30
Figura 4	Entrada de controle: a linha sólida indica a media das entradas de controle usando o controlador III em [47] e a linha pontilhada indica a média da entrada de controle usando o problema de minimização (54). . . . .	31
Figura 5	Região máxima de factibilidade, problema com restrição na entrada: $\bar{u}(i) = 1, \forall i \in \Theta$ , e $N = 1$ . O parser Yalmip [43] e o solver SeDuMi foram usados para plotar a região. . . . .	31
Figura 6	Região máxima de factibilidade, problema com restrição na entrada: $\bar{u}(i) = 1, \forall i \in \Theta$ , e a extensão para o caso multi-passos $N = 3$ no problema de otimização (54), como discutido na Seção 3.5, e o controlador IV em [47]. O parser Yalmip [43] e o parser SeDuMi foram usados para plotar a região. . . . .	32
Figura 7	Região máxima de factibilidade, problema com restrição na entrada com valor máximo: $\bar{u}(i) = 1, \forall i \in \Theta$ , com $N = 1$ abordado por [47]. O parser Yalmip e o parser LMILab foram usados para plotar a região. A região de factibilidade calculada usando o método proposto em [47] não é visível visto que é, provavelmente, composta apenas pela origem. . . . .	33
Figura 8	A região máxima de factibilidade do problema com restrição na entrada: $\bar{u}(i) = 1, \forall i \in \Theta$ , e $N = 3$ para ambas as abordagens em [47] e na extensão para multi-passos (54), como discutido na Seção 3.5. O parser Yalmip e o solver LMILab foram usados para plotar a região. A região máxima de factibilidade do algoritmo proposto em [47] não é visível, visto que é uma região pequena dentro de uma região circular de área igual a $1 \times 10^{-4}$ em torno da origem. . . . .	33
Figura 9	Estados $x_1(n)$ $x_2(n)$ . A linha contínua indica a resposta média dos estados utilizando o controlador obtido por meio do Teorema 4.1 e as linhas tracejadas indicam o desvio padrão dos valores de cada estado. . . . .	48

Figura 10	A linha sólida indica a média das entradas de controle obtidas usando o Teorema 4.1, e as linhas tracejadas indicam o desvio padrão das entradas de controle. . . . .	49
Figura 11	Estados $x_1(n)$ e $x_2(n)$ . As linhas contínuas indicam as médias das trajetórias dos estados controlados usando ações obtidas via aplicação do Teorema 4.1, e as linhas tracejadas indicam o desvio padrão de cada estado do sistema. . . . .	50
Figura 12	Entrada de controle: a linha sólida indica a média da entrada de controle obtida por meio do Teorema 4.1 e do Corolário 4.1; e as linhas tracejadas indicam o desvio padrão das entradas de controle. . . . .	51
Figura 13	Menores autovalores de $\Delta(n)$ . . . . .	51
Figura 14	Valores obtidos para $\delta(n)$ . . . . .	52



## LISTA DE TABELAS

---

Tabela 1	Modos de operação do modelo multiplicador-acelerador de Samuelson. . . . .	29
Tabela 2	Custo médio aproximado sobre as 250 realizações para um passo $N = 1$ . . . . .	29



## INTRODUÇÃO

---

O controle preditivo baseado em modelo (MPC - do inglês, *Model Predictive Control*), também conhecido como controle de horizonte retrocedente (RHC - do inglês, *Receding Horizon Control*) e controle por horizonte móvel (MHC - do inglês, *Moving Horizon Control*) é uma técnica de controle apropriada para lidar com modelos lineares e não lineares sob restrições sendo tais restrições nos estados e saída do sistema e na entrada de controle [10], [13], [28],[30], [33], [36], [49].

MPC foi originalmente desenvolvido e aplicado na indústria petroquímica e, por décadas, tem sido aplicado com sucesso a processos químicos. Atualmente, ele tem sido considerado em muitas outras áreas, incluindo processos industriais, economia, gestão de tráfego, controle automotivo, sistema aeroespacial, e tem se tornado uma ferramenta padrão na indústria [10], [68]. Uma revisão e discussão sobre os benefícios do MPC em aplicações de processos industriais é apresentada em [25], e suas vantagens foram relatadas e comparadas com outros métodos de controle multivariáveis em [38] e [53]. Controladores MPC têm sido desenvolvidos também para eletrônica de potência e a razão para isto é o fato de existirem modelos adequados para prever o comportamento das variáveis controladas [82]. MPC também consegue lidar com sistemas não lineares e tratar atrasos no tempo, mostrando-se bastante adequado em aplicações, como por exemplo, de agricultura[21], [46], [57].

De acordo com [49], algumas razões para o sucesso do MPC nos processos industriais são: ele pode ser aplicado a problemas de controle multivariáveis; pode levar em conta limitações no atuador; permite operar próximo a restrições, o que pode levar frequentemente a uma operação mais lucrativa; tem taxas de atualização de controle relativamente baixas nestas aplicações e por isso existe tempo suficiente para os cálculos *online* necessários.

Uma vantagem do MPC está no fato de este ser uma técnica de controle com capacidade de lidar com restrições, otimizando desempenho e, dependendo da metodologia, garantindo estabilidade [3], [35], [55]. Uma outra característica do método é a fácil incorporação de objetivos de minimização de energia e custo, que são conceitos utilizados nos processos industriais [10], [11].

A ideia tradicional contida nos controladores MPC é resolver um problema de otimização no qual um critério de desempenho deve ser minimizado, baseando-se no modelo do processo para prever a saída em instantes futuros. O critério de desempenho pode ser escolhido como uma função de custo quadrática. Em cada período de tempo, as medidas do sistema são efetuadas para obter uma sequência de controle ótimo que minimize a função custo. É utilizada uma estratégia retrocedente, de forma que em cada instante de tempo, o horizonte é deslocado em direção ao futuro, isto é, o problema é resolvido novamente no próximo instante de tempo baseando-se em novas medidas que envolvem a aplicação de apenas o primeiro sinal de controle da sequência cal-

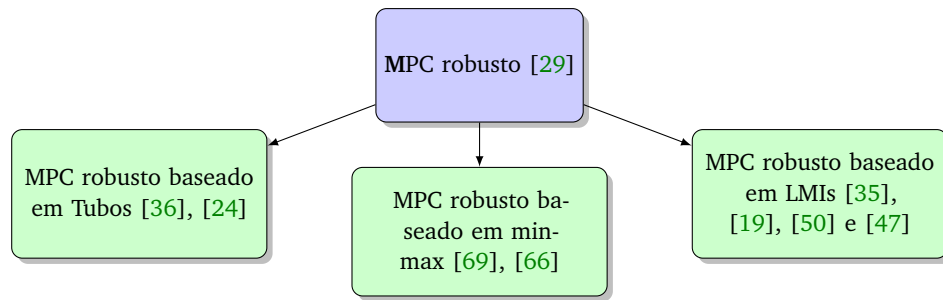


Figura 1: Algoritmos de MPC robusto

culada em cada etapa. Assim, realiza-se controle em *malha fechada* (veja [52] para mais detalhes sobre esse procedimento).

O sucesso do MPC depende da precisão do modelo do processo. Se o modelo for impreciso, o controle pode não atender a especificações de desempenho (vide, por exemplo, [35], [53], [55] e [70] para discussões acerca desse tema).

Algoritmos MPC podem ser construídos de modo a considerar explicitamente incertezas do processo e do modelo. Estes algoritmos são denominados MPC robustos [29]. Nestas estratégias usam-se algoritmos para otimização e, de acordo com o modo de solucionar o problema de otimização e de considerar as restrições, o MPC robusto pode ser dividido em: MPC robusto baseado em LMIs, MPC robusto baseado em Tubos e MPC robusto min-max (como ilustrado na Figura 1). As referências [14], [19], [35], [36], [54] e [83] contêm mais detalhes. Em uma comparação sobre estes MPC robustos feita em [29], notou-se que os métodos MPC baseado em LMIs são mais lentos para calcular o sinal de controle, porém mais fáceis de implementar. Enquanto os métodos MPC min-max e MPC baseado em tubos requerem cálculos de conjuntos de controle invariantes que podem ser difíceis. Entretanto, são mais rápidos quando comparados ao MPC baseado em LMIs.

Dentre os objetivos do MPC robusto, os principais são: garantir que restrições sejam atendidas mesmo na presença de incertezas; garantir estabilidade do sistema; otimizar desempenho; garantir baixo custo computacional. Alguns destes objetivos são considerados, por exemplo, em [13] e [45].

Como incertezas de natureza aleatória estão presentes nos processos, é razoável que a técnica MPC considere MPC estocásticos [36], [56]. Dentro desse tema, o MPC robusto é adaptado para atender aos casos em que as incertezas são estocásticas com distribuição de probabilidades conhecidas, talvez contendo algumas restrições (ou todas) de natureza probabilística. No MPC estocástico, dependendo das características do modelo, as restrições do sistema podem ser modeladas como rígidas (invioláveis) (em inglês, *hard constraints*) de modo que não seja permitido nenhum tipo de violação de restrições e, assim, as restrições devem ser satisfeitas sempre, ou seja, com probabilidade 1 [42], [47], [48], [63]. E pode-se também considerar restrições com probabilidade menor que 1 (em inglês, *soft constraints*) (veja, por exemplo, [12], [23] e [80]). As restrições rígidas nos estados podem ser trocadas, por exemplo, por restrições em que se considera o valor esperado.

No contexto de MPC estocástico, aplicações podem ser vistas em campos como processos de controle [12], [32], engenharia financeira [22], [31], [67],

geração de eletricidade, distribuição e preço [65], controle de temperatura de edifícios [60], controle de tráfego de rede de comunicações[86], perda de dados [26] e em controle preditivo em rede de sistemas distribuídos não lineares [85]. Para acrescentar ao algoritmo MPC informações de natureza probabilística, a função custo pode ser escolhida como sendo o valor esperado sobre a distribuição de incerteza do custo quadrático usual [36]. Para uma discussão sobre o MPC estocástico, pode-se consultar [36] e [56].

### 1.1 MPC APLICADO A SISTEMAS LINEARES COM SALTOS MARKOVIANOS

Alguns sistemas estocásticos, tais como aqueles que apresentam mudanças abruptas em suas dinâmicas, não podem ser apropriadamente descritos pelos sistemas lineares invariantes no tempo com representação em espaço de estados (veja, por exemplo, os artigos que consideram esses sistemas [2], [72], [75]). Tais sistemas podem ser adequadamente descritos pelas classes de sistemas de comutação estocásticos. A primeira variável nessa descrição é o vetor de estados e toma valores em um espaço vetorial  $n$  dimensional, evoluindo continuamente no tempo, e representa o vetor de estados clássico geralmente usado na teoria de controle moderno. A segunda variável toma valores em um conjunto finito e enumerável, e comuta de uma maneira aleatória entre esses valores. Esta classe importante de sistemas estocásticos é denominada Sistemas com Saltos Markovianos.

Nesta tese, é considerada a classe de sistemas lineares com saltos Markovianos, MJLS (em inglês, *Markov Jump Linear Systems*). Tais sistemas são frequentemente utilizados para modelar processos combinando representações contínuas e discretas simultaneamente na descrição de sua evolução temporal, de modo que podem capturar mudanças abruptas no comportamento de processos reais [16, Capítulo 1]. Tais mudanças podem ocorrer, por exemplo, devido a distúrbios ambientais abruptos, falhas de componentes ou reparos, mudanças nas interconexões, mudanças nos modos de operação em plantas não lineares, entre outros fenômenos [16], [51]. Em muitos casos, tais mudanças na estrutura do processo podem ser modeladas por uma cadeia de Markov [16, 74].

Aplicações de MPC em sistemas lineares com saltos Markovianos podem ser vistas, por exemplo, em [81] e [87]. Em [83] é investigado um problema MPC para uma classe de MJLS discretos no tempo e sujeitos a saturações na entrada e incertezas ocorrendo de modo aleatório. Em [80] é apresentado um método para resolver o MPC restrito de MJLS com ruído na entrada e estados de Markov não observáveis pelo controlador. MPC de MJLS discreto no tempo, sem incertezas, mas que leva em conta restrições, é visto em [3] e [71]. MPC com restrições nos estados do sistema e nas entradas de controle para MJLS discreto no tempo, com incertezas tanto nas matrizes do sistema quanto na matriz de probabilidades de transição entre os modos, são apresentados em [47].

Alguns sistemas não lineares podem ser modelados como sistemas em que as matrizes possuem incertezas politópicas [35]. Com o objetivo de ampliar o

conjunto de sistemas que podem ser representados sob a abordagem de saltos Markovianos, pode-se considerar matrizes variantes (politópicas) de parâmetros associadas aos modos da cadeia de Markov, formando assim os sistemas lineares com saltos Markovianos de parâmetros variantes (em inglês, *Markovian Jump Linear Parameter Varying systems*). Projeto de controle e condições de estabilidade para estes sistemas podem ser vistos em [34], [47], [88]. Porém, a solução ótima para o problema de controle de MJLS de parâmetros variantes ainda é um problema em aberto na literatura.

## 1.2 OBJETIVOS

A principal contribuição desta tese é a obtenção de novas condições em termos de desigualdades matriciais lineares para o projeto MPC robusto com restrições, aplicado a sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos (veja, Figura 2), em dois casos:

Caso 1 - Capítulo 3: MPC de horizonte infinito com restrições rígidas nas entradas de controle e nos estados do sistema. Supõe-se também incertezas politópicas variantes no tempo tanto nas matrizes do sistema quanto na matriz de probabilidade de transição entre os modos de Markov. O MPC de horizonte infinito deve garantir um desempenho satisfatório em termos da função de custo quadrático de horizonte infinito, estabilidade no sentido da convergência da média quadrática e fatibilidade recursiva do problema de otimização.

Caso 2 - Capítulo 4: MPC de horizonte finito com restrições de segundo momento nos estados do sistema e nas entradas de controle. Incertezas politópicas variantes no tempo estão presentes nas matrizes do sistema. Além disso, supõe-se a presença de ruído aditivo. O MPC trata de problema de regulação e deve gerar um custo garantido (cota superior) para o custo de horizonte finito.

## 1.3 ESTRUTURA DO TEXTO

A estrutura da tese segue conforme abaixo:

Capítulo 2: Este capítulo apresenta conceitos básicos de MPC robusto através de LMIs.

Capítulo 3: O capítulo apresenta MPC robusto de horizonte infinito. É formulado um problema de minimização de uma cota superior do valor esperado de uma função de custo quadrático de horizonte infinito. É escolhido um funcional de Lyapunov com matrizes de Lyapunov e ações de controle associadas, ambas pertencentes a um politopo e dependentes dos modos de Markov. O problema de minimização é reduzido a um problema de otimização convexo, envolvendo desigualdades matriciais lineares (LMIs). São obtidas condições para a estabilidade em média média quadrática do sistema. Para o caso com restrições rígidas nas entradas de controle e nos estados do sistema, novas condições LMIs são adicionadas ao projeto. Em seguida, a ação de controle será estendida para o caso de ações de controle multi-passos. Por fim, é feita a adição de

um integrador ao projeto com o objetivo de minimizar erros de estado estacionário. O resultado obtido é comparado com outros da literatura recente, para ilustrar a efetividade do método proposto.

**Capítulo 4:** Neste capítulo é projetado um MPC robusto de horizonte finito para MJLS com ruído aditivo. É formulado um problema de minimização de uma cota superior do valor esperado de uma função de custo quadrático. O problema de controle é reduzido a um problema de otimização convexo, envolvendo desigualdades matriciais lineares (LMIs). São consideradas ações de controle dependentes do Modo de Markov. Uma simulação numérica é dada para ilustrar a efetividade do método proposto.

**Capítulo 5:** Apresenta conclusões e perspectivas futuras a respeito dos resultados mostrados nos capítulos 3 e 4.

#### 1.4 NOTAÇÃO

A notação utilizada nesta tese é como segue:  $\mathbb{R}^n$  denota o espaço Euclidiano  $n$ -dimensional, e  $\mathbb{R}^{n \times m}$  denota o espaço linear formado por todas as matrizes reais  $n \times m$ .  $\mathcal{S}^n$  denota o subespaço linear normado de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  de matrizes simétricas tais que  $\{U \in \mathbb{R}^{n \times n} : U = U'\}$ , em que  $U'$  denota a transposta de  $U$ . Seja  $\mathcal{S}^{n0}$  ( $\mathcal{S}^{n+}$ ) o cone convexo fechado (aberto) de matrizes semidefinidas (definidas) positivas  $\{U \in \mathcal{S}^n : U \geq 0$  ( $> 0$ ) $\}$ . Sejam  $\Theta = \{1, \dots, n_\theta\}$  um conjunto finito, e  $\mathcal{S}^{n+}$  o conjunto formado por um número  $n_\theta$  de matrizes tais que  $\mathcal{S}^{n+} = \{U = (U_1, \dots, U_{n_\theta}) : U_i \in \mathcal{S}^{n+}, i \in \Theta\}$ . Para uma matriz  $A$ ,  $A^{-1}$  é a sua inversa (se existir).  $\lambda_{\min}\{A\}$  é o autovalor mínimo de uma matriz  $A$ .  $x(k+n|k)$ ,  $u(k+n|k)$  são o valor predito do vetor de estados  $x$  e de entrada  $u$  em um tempo futuro  $k+n$ , respectivamente, baseado na informação disponível no instante de tempo  $k$ .  $\|x\|_Q = x'Qx$  representa a  $Q$ -norma de um vetor  $x$  na qual a matriz  $Q$  é simétrica definida positiva.  $\mathbb{E}_k[V]$  denota o valor esperado de  $V$  condicionado à informação disponível no instante de tempo  $k$ .





## REVISÃO DE MÉTODOS MPC DE SISTEMAS LINEARES EM TERMOS DE LMIS

---

Uma grande variedade de problemas que surgem na teoria de sistemas e controle pode ser resolvida utilizando técnicas de otimização convexa padrão na forma de desigualdades matriciais lineares. Esses problemas podem ser resolvidos em tempo polinomial, sendo assim tratáveis, computacionalmente [7]. Neste capítulo, será feita uma breve discussão de alguns artigos relevantes da literatura sobre controle preditivo baseado em modelo para sistemas lineares a tempo discreto, cujos desenvolvimentos teóricos estão baseados em desigualdades matriciais lineares.

### 2.1 MPC PARA SISTEMAS LINEARES A TEMPO DISCRETO

Em 1996, em [35] os autores observaram que, na época, a técnica MPC não lidava explicitamente com incertezas no modelo da planta e que a grande quantidade de literatura existente sobre MPC, para análise de estabilidade estava restrita a modelos nominais. Esse fato motivou os autores a proporem uma técnica para síntese de MPC robusto de horizonte infinito, utilizando LMIs, que permite incorporar incertezas politópicas na formulação do problema. A seguir, será feita a descrição do problema e projeto MPC abordado em [35].

Considere o sistema linear variante no tempo, com incertezas nas matrizes do sistema, representado pelas equações:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \mathbf{A}(k)x(k) + \mathbf{B}(k)u(k), \\ y(k) &= \mathbf{C}x(k), \\ [\mathbf{A}(k) \ \mathbf{B}(k)] &\in \Omega_{AB}, \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (1)$$

em que  $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$  e  $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$  são os estados do sistema, a entrada de controle e a saída do sistema, respectivamente. O conjunto  $\Omega_{AB}$  é o politopo  $\text{Co}\{[A_1 \ B_1], \dots, [A_{n_\sigma} \ B_{n_\sigma}]\}$  com número de vértices  $n_\sigma$ , sendo  $\text{Co}$  o fecho convexo, ou seja, se  $[\mathbf{A}(k) \ \mathbf{B}(k)] \in \Omega$  então

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(k) &= \sum_{\ell=1}^{n_\sigma} \sigma_\ell A_\ell, \quad \mathbf{B}(k) = \sum_{\ell=1}^{n_\sigma} \sigma_\ell B_\ell, \\ \sigma &\in \mathbb{R}^{n_\sigma}; \quad \sigma_\ell \geq 0, \quad \ell = 1, 2, \dots, n_\sigma; \quad \sum_{\ell=1}^{n_\sigma} \sigma_\ell = 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Quando não houver incerteza, considera-se  $n_\sigma = 1$  e  $[\mathbf{A}(k) \ \mathbf{B}(k)] = [A_1 \ B_1]$ .

Para o projeto MPC robusto sem restrições, é assumido que  $x(k)$  está disponível em cada instante de tempo  $k$ . Um modelo do processo é usado para prever as saídas futuras do sistema. Utilizando estas previsões, uma sequên-

cia de  $N$  ações de controle  $u(k+n|k)$ , para  $n \geq 0$  é calculada para minimizar uma função de custo quadrático dada por:

$$J_\infty(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \|x(k+n|k)\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|u(k+n|k)\|_{\mathcal{R}}^2, \quad (3)$$

em que  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{R}$  são matrizes de ponderação simétricas e definidas positivas. Considerando essa função, o problema de otimização a ser resolvido é:

$$\min_{u(k+n|k), n \geq 0} \max_{[\mathbf{A}(k+n) \ \mathbf{B}(k+n)] \in \Omega, n \geq 0} J_\infty(k) \quad (4)$$

A minimização é sobre todo o conjunto  $\Omega$  e consiste em: dada uma planta variante no tempo correspondente à sequência  $[\mathbf{A}(k+n) \ \mathbf{B}(k+n)] \in \Omega, n \geq 0$ , tal que, se utilizada como modelo para previsões, levaria ao maior valor ou "pior caso" de  $J_\infty(k)$  entre todas as plantas variantes no tempo cujas matrizes pertencem ao polítopo pré-estabelecido. Porém, como esse problema de minimização não é computacionalmente tratável em [35], os autores abordaram o problema (4) obtendo uma cota superior da função objetivo em cada instante de tempo  $n$ , utilizando uma lei de controle por realimentação de estados dada por:

$$u(k+n|k) = Fx(k+n|k). \quad (5)$$

Para obter a cota superior, a seguinte função de Lyapunov  $V(x(k|k))$  foi escolhida:

$$V(k) = x'(k|k)Px(k|k), \quad k \geq 0, \quad (6)$$

sendo que  $P > 0$  e  $x(k|k)$  o estado sistema (1) no instante  $k$ . Em cada instante de tempo  $k$ , para todo  $x(k+n|k)$  e  $u(k+n|k), k \geq 0$ , a dinâmica (1) é satisfeita com  $[A(n+k) \ B(n+k)] \in \Omega, n+k \geq 0$ , e se espera que

$$\mathbb{E}[V(k+n+1)] - V(k+n) \leq -(\|x(k+n|k)\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|u(k+n|k)\|_{\mathcal{R}}^2) \quad (7)$$

Para que a função objetivo de desempenho seja finita, é necessário que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k+n|k) = 0$  e assim,  $\lim_{k \rightarrow \infty} V(x(k+n|k)) = 0$ . Somando ambos os lados da desigualdade (7) de  $k=0$  até  $k=N$  e fazendo  $N \rightarrow \infty$ , obtém-se

$$-V(k|k) \leq -J_\infty(k). \quad (8)$$

ou seja,

$$\max_{[\mathbf{A}(k+n) \ \mathbf{B}(k+n)] \in \Omega, n \geq 0} J_\infty(k) \leq V(x(k|k)) \quad (9)$$

e assim  $V(k)$  é uma cota superior para  $J_\infty(k)$ . A matriz de realimentação de estados  $F$  na lei de controle (5), que minimiza a cota superior  $V(k)$  na função objetivo de desempenho robusto em cada instante de amostragem  $k$ , é dada por

$$F = YQ^{-1} \quad (10)$$

em que as matrizes  $Q > 0$  e  $Y$  devem ser obtidas da solução (quando ela existe) do problema de minimização:

$$\min_{\gamma, Q, Y} \gamma \quad (11)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} 1 & x(k|k)^T \\ x(k|k) & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (12)$$

e

$$\begin{bmatrix} Q & QA_\ell^T + Y^T B_\ell^T & QQ^{\frac{1}{2}} & Y^T \mathcal{R}^{\frac{1}{2}} \\ A_\ell Q + B_\ell Y & Q & 0 & 0 \\ Q^{\frac{1}{2}} Q & 0 & \gamma \mathcal{I} & 0 \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}} Y & 0 & 0 & \gamma \mathcal{I} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \ell = 1, \dots, n_\sigma; \quad (13)$$

em que  $Q = P^{-1}$  e  $\gamma$  é uma cota superior obtida para função de Lyapunov  $V(k)$ . Apenas a primeira entrada calculada  $u(k|k) = Fx(k|k)$  é implementada. A factibilidade das LMIs (12) e (13) é suficiente para a existência da matriz de Lyapunov  $P$  em (6) e da matriz  $F$  em (5).

Para o projeto MPC restrito, são consideradas restrições rígidas na entradas de controle e nas saídas do sistema, dadas por

$$|u_j(n+k)| \leq \bar{u}_j, \quad n \geq 0, j = 1, \dots, n_u, \quad (14)$$

$$|y_j(n+k)| \leq \bar{y}_j, \quad n \geq 1, j = 1, \dots, n_y, \quad (15)$$

respectivamente, em que  $[\cdot]_j$  denota a linha  $j$  de uma matriz dada ou o elemento  $j$  de um vetor dado. Para garantir que as restrições (14) e (15) sejam satisfeitas, estas são incorporadas em termos de LMIs [35].

Para reduzir o conservadorismo causado pela escolha de uma única função de Lyapunov (6) feita em [35], alguns autores propuseram o uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros em vez de uma única função de Lyapunov constante (veja, por exemplo, [20] e [61]). Os autores em [19] e [50] apresentaram um MPC robusto para sistemas lineares com incertezas politópicas, baseando-se na escolha de várias funções de Lyapunov quadráticas, cada uma correspondente a um conjunto de diferentes vértices de um politopo. Nesses artigos, a função de Lyapunov foi escolhida como:

$$\tilde{V}(k+n|k) = x'(k+n|k)P(\sigma(k))x(k+n|k), \quad P(\sigma(k)) > 0. \quad (16)$$

$$\sigma(k) \in \mathbb{R}^{n_\sigma}, \quad \sigma(k) \geq 0, \quad \sum_{\ell=1}^{n_\sigma} \xi_\ell(k) = 1.$$

A escolha da matriz de Lyapunov dependente de parâmetros  $k$  acrescenta mais graus de liberdade que reduzem o conservadorismo das condições LMIs para obtenção do controlador.

Nos trabalhos citados de [19] e [50] uma preocupação dos pesquisadores é aumentar a região de factibilidade do problema de otimização e ainda manter

um baixo custo computacional. Em [39] e [40], para reduzir ainda mais o conservadorismo do MPC, os autores propuseram um novo conceito de conjunto de controle multi passos (veja a Definição 1, [39]), usando uma série de leis de realimentação de estados que direcionam os estados do sistema de um conjunto elipsoidal para outro e, assim, um MPC robusto com maior desempenho e com região de factibilidade mais ampla pode ser projetado.

Os autores em [39] e [40] utilizaram o sistema considerado em (1) também com restrições rígidas nas entradas (14), como em [35], e restrições nos estados mensuráveis dadas por

$$|\phi_j[x(n+k)]_j| \leq \bar{x}_j, \quad n \geq 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (17)$$

nas quais  $\phi \in \mathbb{R}^{n_\phi \times n_x}$ .

Quando se considera as ações de controle multi passos em um horizonte de tempo infinito, como feito em [39], a expressão para a entrada predita toma a seguinte forma:

$$u(k+n|k) = \begin{cases} \tilde{u}(k), & n = 0; \\ F_n x(k+n|k), & 1 \leq n \leq N-1; \\ F_N x(k+n|k), & n \geq N; \end{cases} \quad (18)$$

$\tilde{u}(n)$  é a entrada de controle atual,  $\tilde{u}(k+n|k)$  é um valor a ser encontrado através da resolução do problema de otimização a cada passo, juntamente com as matrizes  $F_n$ ,  $1 \leq n \leq N-1$  que correspondem ao ganho do controlador em cada um dos  $n$  passos e para  $n \geq N$  tem-se  $F_n = F_N$ .

Os controladores MPC robustos projetados por [39] e [40] foram comparados com outros da literatura e mostraram-se menos conservativos, com maior região de factibilidade e melhor desempenho.

Inspirados por [35], [39], e [40] no artigo [47] os autores apresentaram um MPC robusto com restrições rígidas nos estados e nas entradas de controle, para uma classe de sistemas lineares com saltos Markovianos sujeito a incertezas politópicas nas matrizes do sistema e nas matrizes de probabilidades de transição.

O objetivo principal em [47] foi o projeto de uma lei de controle de realimentação de estados em cada instante de tempo  $k$  que assegura estabilidade em média quadrática do sistema abordado. O resultado obtido foi estendido para o caso multi passos.

É importante observar que, em um projeto de controlador MPC robusto por meio de LMIs, a escolha da função de Lyapunov e da ação de controle a serem adotadas são questões fundamentais pois determinam a região de factibilidade, o desempenho do controlador e a carga computacional [40].

Este capítulo revisou alguns artigos relevantes que apresentaram a técnica MPC baseada em desigualdades matriciais lineares para sistemas lineares a tempo discreto considerando incertezas. Ambos os artigos revisados estavam preocupados com questões de estabilidade e selecionaram o custo quadrático de horizonte infinito. A diferença fundamental entre eles está nas matrizes de Lyapunov e ações de controle selecionadas. Obtém-se uma solução menos conservadora a medida que são escolhidas matrizes de Lyapunov e ações de

controle dependentes de parâmetros. Um desafio a ser vencido com esta escolha específica é um possível aumento do custo computacional.



Neste capítulo, estuda-se a formulação de controle preditivo robusto baseado em modelo, para uma classe de sistemas lineares a tempo discreto sujeitos a saltos Markovianos, com parâmetros variantes no tempo. Como contribuição principal, obtém-se condições descritas por LMIs para a determinação da ação de controle, considerando incertezas nos parâmetros do modelo e na matriz de probabilidade de transição entre os modos de Markov. Também se considera restrições rígidas sobre a entrada de controle e sobre os estados do sistema. Os resultados obtidos são estendidos para o chamado projeto de controle por realimentação de estados dependente do modo multi-passos. Para ilustrar o resultado obtido neste capítulo, simulações numéricas são realizadas e comparadas com uma referência relativamente recente na literatura.

### 3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Para o projeto do MPC robusto, considere o sistema linear a tempo discreto sujeito a saltos Markovianos descrito pela equação:

$$x(k+1) = \mathbf{A}_{\zeta(k)}(\theta(k))x(k) + \mathbf{B}_{\zeta(k)}(\theta(k))u(k), \quad (19)$$

em que  $x(k) \in \mathcal{R}^{n_x}$ ,  $u(k) \in \mathcal{R}^{n_u}$  e  $\theta(k) \in \Theta$  são os estados do sistema, a entrada de controle e os modos do sistema, respectivamente; o estado inicial é  $x_0$  e o modo inicial é  $\theta_0$ .  $\mathbf{A}_{\zeta(k)}(\theta(k))$  e  $\mathbf{B}_{\zeta(k)}(\theta(k))$  são matrizes de dimensões apropriadas. Assuma que  $x(k)$  e  $\theta(k)$  são mensuráveis no instante  $k$  e, que os modos do sistema  $\{\theta(k); k = 0, 1, \dots\}$  são uma cadeia de Markov discreta no tempo tomando valores no conjunto inteiro finito  $\Theta = \{1, \dots, n_\theta\}$  com probabilidades de transição dadas por  $p_k(i, j)$ . Assuma também que a matriz de probabilidade de transição  $\mathcal{P}_k$  incerta dada por

$$\mathcal{P}_k = [p_k(i, j)]_{i, j \in \Theta} \text{ na qual } p_k(i, j) = \Pr(\theta(k+1) = j | \theta(k) = i) \quad (20)$$

e

$$\mathcal{P}_k \in \Omega_{\mathcal{P}} = \text{Co}\{\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2, \dots, \mathcal{P}^{n_\tau}\}, \quad (21)$$

sendo  $\text{Co}$  o fecho convexo.

Suponha que para cada  $\theta(k) = i$ ,  $i \in \Theta$ , as matrizes  $\mathbf{A}_{\zeta(k)}(i)$  e  $\mathbf{B}_{\zeta(k)}(i)$  são dependentes de maneira afim dos parâmetros variantes no tempo  $\zeta(k) \in \Xi^{n_\zeta}$ , com

$$\Xi^{n_\zeta} = \{\zeta \in \mathcal{R}^{n_\zeta}; \zeta_\ell \geq 0, \sum_{\ell=1}^{n_\zeta} \zeta_\ell = 1, \ell = 1, 2, \dots, n_\zeta\}, \quad (22)$$

tais que:

$$\mathbf{A}_{\zeta(k)}(i) = \sum_{\ell=1}^{n_\zeta} \zeta_\ell(k) A_\ell(i), \text{ e } \mathbf{B}_{\zeta(k)}(i) = \sum_{\ell=1}^{n_\zeta} \zeta_\ell(k) B_\ell(i). \quad (23)$$

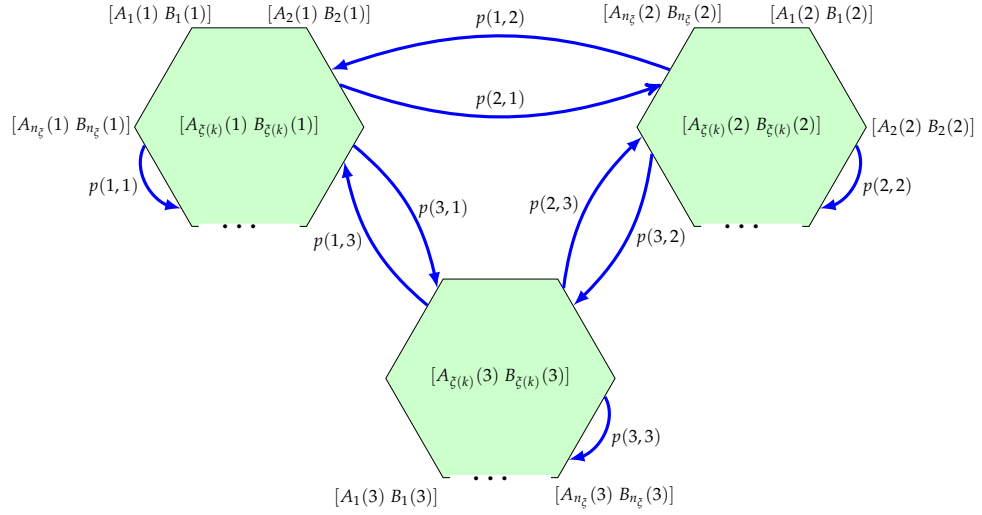


Figura 2: Ilustração dos parâmetros  $A_{\xi(k)}(i)$  e  $B_{\xi(k)}(i)$  para MJLS contendo três modos de Markov.

A Figura 2 ilustra a dependência do sistema (19) em relação aos parâmetros  $\xi(k)$  e cadeia de Markov para o caso em que há três modos.

Restrições rígidas nas entradas de controle e nos estados do sistema são consideradas do mesmo modo que em [47], ou seja,

$$|[u(k+n)]_j| \leq [\bar{u}]_j, \quad n \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_u, \quad (24)$$

$$|[\psi]_j x(k+n)| \leq \bar{x}_j, \quad n \geq 1, \quad j = 1, \dots, n_\psi, \quad (25)$$

em que  $\psi \in R^{n_\psi \times n_x}$  e  $[\cdot]_j$  denota os elementos da linha  $j$  de uma matriz dada ou o elemento da  $j$  de um vetor dado.

Neste capítulo, para o projeto MPC do sistema (19)–(25), pretende-se encontrar a entrada de controle ideal que resolve o problema:

$$\begin{aligned} & \min_{u(k+n|k), n \geq 0} \max J_\infty(k), \\ & [A_{\xi(k+n)}(i) B_{\xi(k+n)}(i)], \mathcal{P}_{k+n} \in \Omega_{\mathcal{P}}, \\ & \xi(k+n) \in \mathcal{S}^{n_\xi}, i = \theta(k+n|k), n \geq 0 \\ & \text{sujeito a (19)–(25),} \end{aligned} \quad (26)$$

em que a função custo de horizonte infinito é como a dada por [47], ou seja,

$$J_\infty(k) = \mathbb{E}_k \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \|x(k+n|k)\|_{\mathcal{Q}(i)}^2 + \|u(k+n|k)\|_{\mathcal{R}(i)}^2 \right], \quad (27)$$

em que  $\mathcal{Q}(i), \mathcal{R}(i)$  são matrizes de ponderação simétricas dadas.

Resolver o problema de minimização MPC "min-max" corresponde a: dada uma planta variante no tempo  $[A_{\xi(k+n)}(i) B_{\xi(k+n)}(i)]$ , para todo  $i \in \Theta$ , para  $\xi(k+n) \in \Xi^{n_\xi}$  e  $n \geq 0$  utilizar um modelo de previsão para encontrar o valor de  $u(k+n|k)$  que conduz à minimização do maior valor ou "pior caso" da função custo  $J_\infty(k)$ .

Nesta tese será utilizada a definição de estabilidade em média quadrática como segue:



**Definição 3.1** (Estabilidade em média quadrática [47]). *O sistema dado por (19)–(23) é estável em média quadrática para um estado inicial dado  $x_0$  e modo inicial  $\theta_0$  se  $\mathbb{E}[x'(k)x(k)] \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .*

**Observação 3.1.** *O problema 26 considera robustez que depende de conjuntos politópicos variantes no tempo. O problema de minimização 26 ainda está aberto na literatura porque não existe uma solução algébrica. Esta tese propõe condições suficientes, por meio de desigualdades matriciais lineares, para se obter uma cota superior para a função custo de horizonte infinito. Supõe-se que os modos de Markov são observáveis, ou seja, que os modos estão disponíveis para o controle. Além disso, a seqüência de controle encontrada deve garantir estabilidade em média quadrática do sistema (19) sujeito à restrições rígidas.*

### 3.2 AÇÕES DE CONTROLE

A estrutura geral da ação de controle a ser adotada na estratégia MPC é muito similar à estrutura considerada em [47]. Em cada instante de tempo  $k$ , a ação de controle é definida pela composição de um valor otimizado  $u(k)$  a ser aplicado no passo atual, seguido pela lei de controle por realimentação de estados para os próximos passos no horizonte de predição, dada por:

$$u(k+n|k) = \begin{cases} u(k), & n = 0; \\ \mathbf{F}_{\xi(k+n)}(\theta(k+n|k))x(k+n|k), & n \geq 1; \end{cases} \quad (28)$$

em que  $u(k) \in \mathcal{R}^{n_u}$  é calculado resolvendo o problema de otimização (26) em cada instante de tempo. No entanto, uma diferença chave em relação ao que foi feito no artigo [47] é a escolha da matriz de realimentação de estados como combinações convexas de um número finito  $n_\xi$  de matrizes, para cada modo  $i \in \Theta$ , tal que:

$$\mathbf{F}_{\xi(k+n)}(i) = \sum_{\ell=1}^{n_\xi} \xi_\ell(k+n)F_\ell(i), \quad i = \theta(k+n|k) \in \Theta; \quad (29)$$

nas quais  $n_\xi$  matrizes de ganhos de realimentação  $F_\ell(i)$  são otimizadas junto com  $u(k)$ . Como uma alternativa similar a [47], é possível usar uma ação de controle em cada instante de tempo  $k$  como segue:

$$u(k+n|k) = \begin{cases} u(k), & n = 0; \\ \mathbf{F}_{\xi(k+n)}^n(\theta(k+n|k))x(k+n|k), & 1 \leq n \leq N-1; \\ \mathbf{F}_{\xi(k+n)}^N(\theta(k+n|k))x(k+n|k), & n \geq N; \end{cases} \quad (30)$$

sendo  $N$  o número de passos no horizonte de predição para o qual as matrizes de realimentação devem ser obtidas para resolver o problema de otimização (26). Neste caso particular, considerando  $\theta(k+n|k) = i, i \in \Theta$ , cada matriz de ganho de realimentação  $\mathbf{F}_{\xi(k+n)}(i)$ , para cada modo  $i$ , otimizada em  $n = N$ , é reutilizada para  $n > N$ .

Vale ressaltar que, em [47], uma ação de controle similar a (30) é empregada, porém, com base na otimização de uma matriz de realimentação para

cada etapa de tempo durante  $N$  passos e não depende das combinações convexas de matrizes de vértices, de modo que o número total de matrizes a serem consideradas seja proporcional a  $N$  (veja a expressão (18)). Nesta seção, o número de matrizes a serem consideradas é proporcional a  $n_{\xi}$  no caso (28)–(29), e proporcional a  $n_{\xi}N$  no caso (30). Resultados numéricos (Seção 3.6) indicam que as duas abordagens propostas nesta seção podem aumentar o conjunto de soluções factíveis para o problema de otimização (26).

### 3.3 CASO SEM RESTRIÇÕES

Esta seção apresenta novas condições LMIs para o projeto MPC robusto do sistema (19)–(23) sem levar em conta restrições. Para isso, a lei de controle por realimentação de estados (28) será utilizada e a função afim de Lyapunov dependente de parâmetros [27] é selecionada como:

$$\mathcal{V}(k+n) = \|x(k+n|k)\|_{\mathbf{P}_{\xi(k+n)}(\theta(k+n|k))}^2, \quad n \geq 1 \quad (31)$$

na qual, para  $\theta(k+n|k) = i$ ,  $i \in \Theta$ , as matrizes de ponderação simétricas, definidas positivas  $\mathbf{P}_{\xi(k+n)}(i)$  são dadas pela combinação convexa:

$$\mathbf{P}_{\xi(k+n)}(i) = \sum_{\ell=1}^{n_{\xi}} \xi_{\ell}(k+n) P_{\ell}(i). \quad (32)$$

De maneira similar ao que foi feito em [47] aplica-se a restrição de contratividade estocástica

$$\mathcal{V}(k+n) - \mathbb{E}_{k+n|k}[\mathcal{V}(k+n+1)] \geq \|x(k+n|k)\|_{\mathcal{Q}(i)}^2 + \|u(k+n|k)\|_{\mathcal{R}(i)}^2, \quad (33)$$

$n \geq 1$ , na qual  $i = \theta(k+n|k)$ , para obter um limite superior da função custo (27).

No Lema (3.1), são apresentadas novas condições LMIs para checar a factibilidade da restrição estocástica imposta por (33).

**Lema 3.1.** *As restrições de contratividade estocástica em (33) são satisfeitas se existirem matrizes  $Q_{\ell}(i) \in \mathcal{S}^{n^+}$  e matrizes  $G_{\ell}(i)$ ,  $Y_{\ell}(i)$ ,  $W_h(i)$ ,  $Z_h(i)$ ; para  $\ell, h = 1, \dots, n_{\xi}$ ,  $\tau = 1, \dots, n_{\tau}$  e  $i \in \Theta_+^{j,\tau}$ , com  $\Theta_+^{j,\tau} = \{i \in \Theta; p(i, j; \tau) > 0\}$ , tais que as LMIs:*

$$\begin{bmatrix} G'_{\ell}(i) + G_{\ell}(i) - Q_{\ell}(i) & * & \dots & * & * & * & * \\ A_{\ell}(i)G_{\ell}(i) & \hat{Q}_{\ell h}(1) & \dots & * & * & * & * \\ A_{\ell}(i)G_{\ell}(i) & -R_{\ell h}(i) & \ddots & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * & * & * & * \\ A_{\ell}(i)G_{\ell}(i) & -R_{\ell h}(i) & \dots & \hat{Q}_{\ell h}(n_{\theta}) & * & * & * \\ Q^{\frac{1}{2}}(i)G_{\ell}(i) & 0 & \dots & 0 & \mathcal{I} & 0 & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}(i)Y_{\ell}(i) & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathcal{I} & * \\ -Y_{\ell}(i) & \hat{Z}_{\ell h}(i) & \dots & \hat{Z}_{\ell h}(i) & 0 & 0 & Z_h'(i) + Z_h(i) \end{bmatrix} > 0 \quad (34)$$

sejam factíveis, sendo:

$$\hat{Q}_{\ell h}(j) = \frac{1}{p(i, j; \tau)} Q_h(j) - R_{\ell h}(i), \quad j = 1, 2, \dots, n_{\theta}$$

$$\hat{Z}_{\ell h}(i) = Z'_h(i)B'_\ell(i) - W_h(i) \text{ e } R_{\ell h}(i) = B_\ell(i)W_h(i) + W'_h(i)B'_\ell(i).$$

**Demonstração:** Para  $n \geq 1$ ,  $\theta(k+n|k) = i$ , suponha que a LMI em (34) seja factível para matrizes simétricas definidas positivas  $Q_\ell(i)$  e matrizes  $G_\ell(i)$ ,  $Y_\ell(i)$  de dimensões apropriadas. Portanto, é possível concluir que  $G'_\ell(i) + G_\ell(i) - Q_\ell(i) > 0$ . Além disso, visto que

$$\begin{aligned} [G_\ell(i) - Q_\ell(i)]'Q_\ell^{-1}(i)[G_\ell(i) - Q_\ell(i)] &= G'_\ell(i)Q_\ell^{-1}(i)G_\ell(i) - G'_\ell(i) - G_\ell(i) \\ &\quad + Q_\ell(i) > 0, \end{aligned}$$

tem-se que

$$G'_\ell(i)Q_\ell^{-1}(i)G_\ell(i) \geq G'_\ell(i) + G_\ell(i) - Q_\ell(i) > 0.$$

Logo, da LMI (34) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} G'_\ell(i)Q_\ell^{-1}(i)G_\ell(i) & * & \dots & * & * & * & * \\ A_\ell(i)G_\ell(i) & \hat{Q}_{\ell h}(1) & \dots & * & * & * & * \\ A_\ell(i)G_\ell(i) & -R_{\ell h}(i) & \ddots & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * & * & * & * \\ A_\ell(i)G_\ell(i) & -R_{\ell h}(i) & \dots & \hat{Q}_{\ell h}(n_\theta) & * & * & * \\ Q^{\frac{1}{2}}(i)G_\ell(i) & 0 & \dots & 0 & \mathcal{I} & 0 & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}(i)Y_\ell(i) & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathcal{I} & * \\ -Y_\ell(i) & \hat{Z}_{\ell h}(i) & \dots & \hat{Z}_{\ell h}(i) & 0 & 0 & Z'_h(i) + Z_h(i) \end{bmatrix} > 0 \quad (35)$$

multiplicando (35) por

$$\begin{bmatrix} G_\ell^{-1'}(i) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathcal{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix}$$

pela esquerda e por sua transposta à direita, resulta em

$$M_{\ell h}(i, \tau) = \begin{bmatrix} Q_\ell^{-1}(i) & * & \dots & * & * & * & * \\ A_\ell(i) & \hat{Q}_{\ell h}(1) & \dots & * & * & * & * \\ A_\ell(i) & -R_{\ell h}(i) & \ddots & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * & * & * & * \\ A_\ell(i) & -R_{\ell h}(i) & \dots & \hat{Q}_{\ell h}(n_\theta) & * & * & * \\ Q^{\frac{1}{2}}(i) & 0 & \dots & 0 & \mathcal{I} & 0 & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}(i)F_\ell(i) & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathcal{I} & * \\ -F_\ell(i) & \hat{Z}_{\ell h}(i) & \dots & \hat{Z}_{\ell h}(i) & 0 & 0 & Z'_h(i) + Z_h(i) \end{bmatrix} > 0, \quad (36)$$

em que  $F_\ell(i) = Y_\ell(i)G_\ell^{-1}(i)$ .

Tomando a combinação convexa de (36) sobre  $\ell$  associado com o tempo  $k+n$ , e sobre  $h$  associado com o tempo  $k+n+1$ ; isto é, calculando a matriz

$$\mathcal{M}(i, \tau) = \sum_{h=1}^{n_{\xi}} \xi_h(k+n+1) \left[ \sum_{\ell=1}^{n_{\xi}} \xi_{\ell}(k+n) \mathcal{M}_{\ell h}(i, \tau) \right];$$

desde que  $\xi(k+n+1), \xi(k+n) \in \mathbb{S}^{n_{\xi}}$  e  $M_{\ell h}(i, \tau) > 0$ , tem-se que  $\mathcal{M}(i, \tau) =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\xi(k+n)}^{-1}(i) & * & \dots & * & * & * & * \\ \mathbf{A}_{\xi(k+n)}(i) & \hat{\mathbf{Q}}(i; 1) & \dots & * & * & * & * \\ \mathbf{A}_{\xi(k+n)}^z(i) & -R(i) & \dots & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{k+n}(i) & -R(i) & \dots & \hat{\mathbf{Q}}(i; n_{\theta}) & * & * & * \\ \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}}(i) & 0 & \dots & 0 & \mathcal{I} & * & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}(i) \mathbf{F}_{\xi(k+n)}(i) & 0 & \dots & \mathcal{I} & 0 & 0 & * \\ -\mathbf{F}_{\xi(k+n)}(i) & \hat{\mathbf{Z}}(i) & \dots & \hat{\mathbf{Z}}(i) & 0 & 0 & \mathbf{Z}'_{\xi(k+n+1)}(i) + \mathbf{Z}'_{\xi(k+n+1)}(i) \end{bmatrix} > 0, \quad (37)$$

sendo

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}}(i; j) &= \frac{1}{p(i, j; \tau)} \mathbf{Q}_{\xi(k+n+1)}(j) - R(i), \quad j = 1, 2, \dots, M, \\ \hat{\mathbf{Z}}(i) &= \mathbf{Z}'_{\xi(k+n+1)}(i) \mathbf{B}'_{\xi(k+n)}(i) - \mathbf{W}_{\xi(k+n+1)}(i), \end{aligned}$$

e

$$R(i) = \mathbf{B}_{\xi(k+n)}(i) \mathbf{W}_{\xi(k+n+1)}(i) + \mathbf{W}'_{\xi(k+n+1)}(i) \mathbf{B}'_{\xi(k+n)}(i).$$

Multiplicando (37) por

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathcal{I} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathcal{I} \\ 0 & -\mathbf{B}'_{\xi(k+n)}(i) & \dots & -\mathbf{B}'_{\xi(k+n)}(i) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pela direita e por sua transposta à esquerda obtém-se

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_{\xi(k+n)}(i) & * & \dots \\ \mathbf{A}_{k+n}^e(i) & p^{-1}(i, 1; \tau) \mathbf{Q}_{\xi(k+n+1)}(1) & \dots \\ \mathbf{A}_{k+n}^e(i) & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \mathbf{A}_{k+n}^e(i) & 0 & \dots \\ \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}}(i) & 0 & \dots \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}(i) \mathbf{F}_{\xi(k+n)}(i) & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
* & * & * \\
* & * & * \\
* & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
p^{-1}(i, n_\theta; \tau) \mathbf{Q}_{\xi(k+n+1)}(n_\theta) & * & * \\
0 & \mathcal{I} & * \\
0 & 0 & \mathcal{I}
\end{bmatrix} > 0, \quad (38)$$

na qual

$$\mathbf{A}_{k+n}^e(i) = \mathbf{A}_{\xi(k+n)}(i) + \mathbf{B}_{\xi(k+n)}(i) \mathbf{F}_{\xi(k+n)}(i).$$

Seja  $\mathbf{P}_{\xi(k+n)}(i) = \mathbf{Q}_{\xi(k+n)}^{-1}(i)$  para todo  $n \geq 1$ . Pelo complemento de Schur a desigualdade matricial (38) é equivalente à desigualdade quadrática de Lyapunov

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\xi(k+n)}(i) - (\mathbf{A}_{k+n}^e(i))' \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{k+n|k}(i, j) \mathbf{P}_{\xi(k+n+1)}(j) \mathbf{A}_{k+n}^e(i) \\
- \left[ \mathcal{Q}(i) + \mathbf{F}'_{\xi(k+n)}(i) \mathcal{R}(i) \mathbf{F}_{\xi(k+n)}(i) \right] \geq 0. \quad (39)
\end{aligned}$$

De acordo com a equação (20),

$$\mathbb{E}_{k+n|k} \left[ \mathbf{P}_{\xi(k+n+1)}(\theta(k+n+1|k)) \right] = \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{k+n|k}(i, j) \mathbf{P}_{\xi(k+n+1)}(j),$$

Logo, a desigualdade (39) é equivalente a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\xi(k+n)}(i) - (\mathbf{A}_{k+n}^e(i))' \times \mathbb{E}_{k+n} \left[ \mathbf{P}_{\xi(k+n+1)}(\theta(k+n+1|k)) \right] \times (\mathbf{A}_{k+n}^e(i)) - \\
\left[ \mathcal{Q}(i) + \mathbf{F}'_{\xi(k+n)}(i) \mathcal{R}(i) \mathbf{F}_{\xi(k+n)}(i) \right] \geq 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando esta última expressão por  $x'(k+n|k)$  à esquerda e por  $x(k+n|k)$  à direita, obtém-se que para  $n \geq 1$ , é válida a desigualdade:

$$\mathcal{V}(k+n) - \mathbb{E}_{k+n|k}[\mathcal{V}(k+n+1)] \geq \|x(k+n|k)\|_{\mathcal{Q}(i)}^2 + \|u(k+n|k)\|_{\mathcal{R}(i)}^2.$$

□

Baseando-se na restrição estocástica (33) imposta, uma cota superior do pior caso da função custo de horizonte infinito (27) será obtida seguindo as mesmas ideias de [47, Seção 3]. Primeiro, tomando o valor esperado de ambos os lados das equações (33), tem-se que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_k[\mathcal{V}(k+n)] - \mathbb{E}_k[\mathcal{V}(k+n+1)] \geq \\
\mathbb{E}_k \left[ \|x(k+n|k)\|_{\mathcal{Q}(\theta(k+n|k))}^2 + \|u(k+n|k)\|_{\mathcal{R}(\theta(k+n|k))}^2 \right]
\end{aligned}$$

Somando ambos os lados da equação anterior, de  $n = 1$  até  $n \rightarrow \infty$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{n=\infty} (\mathbb{E}_k[\mathcal{V}(k+n)] - \mathbb{E}_k[\mathcal{V}(k+n+1)]) = \mathbb{E}_k[\mathcal{V}(1+k)] - \mathbb{E}_k[\mathcal{V}(2+k)] + \\ & \mathbb{E}_k[\mathcal{V}(2+k)] - \mathbb{E}_k[\mathcal{V}(3+k)] + \dots + \mathbb{E}_k[\mathcal{V}(k+n)] - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_k[\mathcal{V}(k+n+1)] \\ & \geq \mathbb{E}_k \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \|x(k+n|k)\|_{\mathcal{Q}(\theta(k+n|k))}^2 + \|u(k+n|k)\|_{\mathcal{R}(\theta(k+n|k))}^2 \right] \end{aligned}$$

ou seja, para  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_k[\mathcal{V}(k+1)] - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_k[\mathcal{V}(k+n+1)] & \geq \mathbb{E}_k \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \|x(k+n|k)\|_{\mathcal{Q}(\theta(k+n|k))}^2 \right. \\ & \left. + \|u(k+n|k)\|_{\mathcal{R}(\theta(k+n|k))}^2 \right]. \end{aligned}$$

Logo, a soma infinita  $\mathbb{E}_k \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \|x(k+n|k)\|_{\mathcal{Q}(\theta(k+n|k))}^2 + \|u(k+n|k)\|_{\mathcal{R}(\theta(k+n|k))}^2 \right]$  de termos não negativos é limitada superiormente e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_k \left[ \|x(k+n|k)\|_{\mathcal{Q}(\theta(k+n|k))}^2 + \|u(k+n|k)\|_{\mathcal{R}(\theta(k+n|k))}^2 \right] = 0.$$

Como  $\mathcal{Q}(i) > 0$ ,  $\mathcal{R}(i) > 0$  e  $P_\ell(i) > 0$ , para todo  $i \in \Theta$ , é possível concluir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_k[\mathcal{V}(k+n+1)] = 0$ . Então, para o estado inicial dado  $x(k)$  e o modo inicial dado  $\theta(k)$ , tem-se:

$$\begin{aligned} J_\infty(k) & = \mathbb{E}_k \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \|x(k+n|k)\|_{\mathcal{Q}(i)}^2 + \|u(k+n|k)\|_{\mathcal{R}(i)}^2 \right] + \|x(k)\|_{\mathcal{Q}(\theta(k))}^2 \\ & \quad + \|u(k)\|_{\mathcal{R}(\theta(k))}^2 \\ & \leq \|x(k)\|_{\mathcal{Q}(\theta(k))}^2 + \|u(k)\|_{\mathcal{R}(\theta(k))}^2 + \mathbb{E}_k[\mathcal{V}(k+1)]. \end{aligned}$$

Considere-se um escalar  $\gamma_1 \geq 0$  tal que:

$$\|x(k)\|_{\mathcal{Q}(\theta(k))}^2 + \|u(k)\|_{\mathcal{R}(\theta(k))}^2 \leq \gamma_1$$

ou seja,

$$x'(k)(\mathcal{Q}(\theta(k))x(k) + u'(k)(\mathcal{R}(\theta(k))u(k) \leq \gamma_1.$$

Utilizando o complemento de Schur, a desigualdade acima pode ser escrita em termos da LMI:

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & * & * \\ x(k) & \mathcal{Q}^{-1}(\theta(k)) & * \\ u(k) & 0 & \mathcal{R}^{-1}(\theta(k)) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (40)$$

Considere-se ainda, um escalar  $\gamma_2$  tal que

$$\begin{bmatrix} \gamma_2 & * \\ A_\ell(\theta(k))x(k) + B_\ell(\theta(k))u(k) & p^{-1}(\theta(k), 1; \tau)Q_\ell(1) \\ \vdots & \vdots \\ A_\ell(\theta(k))x(k) + B_\ell(\theta(k))u(k) & 0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} \dots & * & \\ \dots & * & \\ \ddots & \vdots & \\ \dots & p^{-1}(\theta(k), n_\theta; \tau)Q_\ell(n_\theta) & \end{array} \right] \geq 0,$$

para todo  $\ell = 1, \dots, n_{\bar{\xi}}$ ,  $\tau = 1, \dots, n_\tau$  e para  $\theta(k) \in \Theta$ .

Tomando combinação convexa de (41) sobre  $\ell$  no instante  $k$ , tem-se que:

$$\left[ \begin{array}{ccc} \gamma_2 & * & \\ A_{\bar{\xi}(k)}(\theta(k))x(k) + B_{\bar{\xi}(k)}(\theta(k))u(k) & p^{-1}(\theta(k), 1; \tau)\mathbf{Q}_{\bar{\xi}(k)}(1) & \\ \vdots & \vdots & \\ A_{\bar{\xi}(k)}(\theta(k))x(k) + B_{\bar{\xi}(k)}(\theta(k))u(k) & 0 & \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} \dots & * & \\ \dots & * & \\ \ddots & \vdots & \\ \dots & p^{-1}(\theta(k), n_\theta; \tau)\mathbf{Q}_{\bar{\xi}(k)}(n_\theta) & \end{array} \right] \geq 0,$$

Aplicando o complemento de Schur, obtém-se:

$$\gamma_2 \geq x'(k+1|k)\mathbb{E}_k(\mathbf{P}_{\bar{\xi}(k+1)}(\theta(k+1|k))x(k+1|k) = \mathbb{E}_k[\mathcal{V}(k+1)]$$

para todo  $\tau = 1, \dots, n_\tau$  e para  $\theta(k) \in \Theta$ . Então,

$$\mathbb{E}_k[\mathcal{V}(k+1)] \leq \gamma_2,$$

Tem-se, ainda, que se (40) e (41) são factíveis, então

$$J_\infty(k) \leq \gamma_1 + \gamma_2$$

isto é,  $\gamma_1 + \gamma_2$  é uma cota superior para a função custo  $J_\infty(k)$ .

É possível escrever o problema de otimização para o MPC irrestrito dado pelas equações (19)–(23) como um problema de minimização. Em outras palavras, uma cota superior será encontrada se o seguinte problema de minimização tem solução para cada instante de tempo  $n$ :

$$\begin{aligned} \min_{\gamma_1, \gamma_2, u(n), \tilde{G}_\ell(i), Q_\ell(i), Y_\ell(i)} \quad & \gamma_1 + \gamma_2 & (42) \\ \text{sujeito a} \quad & (34), (40) \text{ e } (41) \end{aligned}$$

Note que as desigualdades matriciais (40) e (41) são similares às desigualdades (15) e (16) em Lu, Li e Xi [47], respectivamente. Neste capítulo, para  $i \in \Theta_+^{j,\tau} = \{i \in \Theta; p(i, j; \tau) > 0\}$ , as matrizes  $Q_1(i)$  da desigualdade (16) de [47] foram trocadas por  $Q_\ell(i)$  para todo  $\ell = 1, \dots, n_{\bar{\xi}}$  na equação (41).

O próximo Teorema indica a condição de factibilidade do problema de otimização (42) e de estabilidade em malha fechada do sistema (19)–(23).

**Teorema 3.1.** *Considere o MJLS incerto e irrestrito descrito pelas equações (19)–(23). Se existir uma solução para o problema de otimização (42) em cada instante de tempo  $k$  para o estado inicial  $x(k)$  e o modo inicial  $i = \theta(k)$ , existirá também uma solução em qualquer instante de tempo  $t \geq k$  e; o controlador MPC baseado no problema (42) garante estabilidade do sistema em malha fechada no sentido de convergência em média quadrática.*

A demonstração do Teorema 3.1 segue passos similares à demonstração do Teorema 3 em [64] será omitida aqui.

### 3.4 CASO COM RESTRIÇÕES

Nesta seção um novo conjunto de LMIs com respeito ao usado em [47, Seção 3.2] é proposto, no contexto de projeto MPC para o MJLS representado pelas equações (19)–(21). São consideradas restrições rígidas nas entradas de controle e nos estados do sistema dadas respectivamente, por (24) e (25). A menos que se indique o contrário, os mesmos passos da Seção 4 em [47] são seguidos para o projeto.

Considere o funcional de Lyapunov dado por:

$$\bar{V}(k+n) = \|x(k+n|k)\|_{\mathbb{W}_{\xi(k+n)}^{-1}(\theta(k+n|k))}^2, \quad n \geq 1. \quad (43)$$

Para cada  $\theta(k+n|k) = i$ ,  $i \in \Theta$ ,  $\mathbb{W}_{\xi(k+n)}^{-1}(i)$  são matrizes de ponderação simétricas positivas definidas dadas pela combinação convexa  $\mathbb{W}_{\xi(k+n)}^{-1}(i) = \sum_{\ell=1}^{n_{\xi}} \xi_{\ell}(k+n) \mathcal{W}_{\ell}^{-1}(i)$ . As matrizes  $\mathcal{W}_{\ell}(i)$  e as suas inversas  $\mathcal{W}_{\ell}^{-1}(i)$  devem ser determinadas resolvendo um problema de otimização associado ao MPC robusto proposto. Além disso, as restrições sobre  $\bar{V}(k+n)$  dadas abaixo são importantes para garantir factibilidade recursiva, como mostrado em [47]:

$$\bar{V}(k+1) \leq 1; \quad (44)$$

$$\bar{V}(k+n+1) \leq \bar{V}(k+n), \quad n \geq 1. \quad (45)$$

Observe que a desigualdade (25), para  $n = 1$ , é equivalente à desigualdade:

$$-\bar{x}_j \leq \psi_j [A_{\ell}(\theta(k))x(k) + B_{\ell}(\theta(k))u(k)] \leq \bar{x}_j, \quad j = 1, \dots, n_{\psi}, \quad \ell = 1, \dots, n_{\xi}; \quad (46)$$

e que a restrição (24), para  $n = 0$ , pode ser reescrita como:

$$-[\bar{u}(k)]_j \leq [u(k)]_j \leq [\bar{u}(k)]_j, \quad j = 1, \dots, n_u. \quad (47)$$

O próximo Lema apresenta condições LMIs que garantem a validade das restrições (44) e (45).

**Lema 3.2.** *Considere o modo inicial  $\theta(k)$  e o estado inicial  $x(k)$  dados. As restrições rígidas nas entradas, dadas por (24), para  $n \geq 1$  e nos estados, dadas por (25), para  $n \geq 2$ , junto com as desigualdades (44) e (45) são válidas, se as desigualdades (46) se verificarem e, se existirem matrizes simétricas  $\mathcal{W}_{\ell}(i)$ ,*



$\mathcal{U}_\ell(i)$ ,  $\mathcal{X}_\ell(i)$ ,  $G_\ell(i)$ ,  $Y_\ell(i)$ ,  $Z_h(i)$  e  $W_h(i)$ , com  $i \in \Theta_+^{j,\tau} = \{i \in \Theta; p(i, j; \tau) > 0\}$ ,  $j \in \Theta$  e  $\ell, h = 1, \dots, n_\xi$ ; tais que as LMIs:

$$\begin{bmatrix} 1 & * \\ A_\ell(\theta(k))x(k) + B_\ell(\theta(k))u(k) & \mathcal{W}_\ell(i) \end{bmatrix} \geq 0, \quad (48)$$

$$\begin{bmatrix} G'_\ell(i) + G_\ell(i) - \mathcal{W}_\ell(i) & * & * \\ A_\ell(i)G_\ell(i) & \mathcal{W}_h(j) - R_{\ell h}(i) & * \\ -Y_\ell(i) & Z_h'B'_\ell(i) - W_h(i) & Z_h(i) + Z'_h(i) \end{bmatrix} > 0, \quad (49)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_\ell(i) & Y_\ell(i) \\ * & G'_\ell(i) + G_\ell(i) - \mathcal{W}_\ell(i) \end{bmatrix} > 0, \\ [\mathcal{U}_\ell(i)]_{jj} \leq \bar{u}_j^2, \end{cases} \quad (50)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathcal{X}_\ell(i) & \psi \mathcal{W}_\ell(i) \\ * & \mathcal{W}_\ell(i) \end{bmatrix} \geq 0, \\ [\mathcal{X}_\ell(i)]_{jj} \leq \bar{x}_j^2, \end{cases} \quad (51)$$

sejam factíveis, nas quais  $[\cdot]_{jj}$  denota o elemento na linha  $j$  e na coluna  $j$  das matrizes correspondentes, sendo

$$R_{\ell h}(i) = B_\ell(i)W_h(i) + W_h'(i)B'_\ell(i).$$

**Demonstração:** Pelo complemento de Schur, assumindo que (25) é satisfeita para  $n = 1$ ; tem-se que (46) é satisfeita. As restrições (44) e (48) são equivalentes. De fato,  $\mathcal{V}(k+1) \leq 1$ , se, e somente se,

$$x'(k+1)\mathbf{W}_{\xi(k+1)}^{-1}(\theta(k+1|k))x(k+1) \leq 1$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & x'(k)[\mathbf{A}_{\xi(k+1)}(\theta(k)) + \mathbf{B}_{\xi(k+1)}(\theta(k))\mathbf{F}_{\xi(k+1)}(\theta(k))]' \mathbf{W}_{\xi(k+1)}^{-1}(\theta(k+1|k)) \\ & \times [\mathbf{A}_{\xi(k)}(\theta(k)) + \mathbf{B}_{\xi(k)}\mathbf{F}_{\xi(k+1)}(\theta(k))]x(k) \leq 1 \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} & x'(k)[A_\ell(\theta(k)) + B_\ell(\theta(k))F_\ell(\theta(k))]' \mathcal{W}_\ell^{-1}(\theta(k+1|k)) \\ & \times [A_\ell(\theta(k)) + B_\ell(\theta(k))F_\ell(\theta(k))]x(k) \leq 1, \end{aligned}$$

e utilizando o complemento de Schur, a última desigualdade é equivalente à LMI (48).

As restrições (24) para  $n \geq 1$  são garantidas por (50) e as restrições (25) para  $n \geq 2$  são garantidas por (51) ver [47] para mais detalhes. Assim, resta provar que a factibilidade das LMIs em (49) garante que a restrição (45) seja satisfeita.

Assuma que (49) é válida para matrizes simétricas positivas definidas  $\mathcal{W}_\ell(i)$  e matrizes  $G_\ell(i)$ ,  $Y_\ell(i)$  de dimensões apropriadas. De maneira similar ao Lema

3.1, pode-se concluir que  $G'_\ell(i)\mathcal{W}_\ell^{-1}(i)G_\ell(i) \geq G'_\ell(i) + G_\ell(i) - \mathcal{W}_\ell(i) > 0$  e (49), portanto,

$$\begin{bmatrix} G'_\ell(i)\mathcal{W}_\ell^{-1}(i)G_\ell(i) & * & * \\ A_\ell(i)G_\ell(i) & \mathcal{W}_h(j) - R_{\ell h}(i) & * \\ -Y_\ell(i) & Z_h'B'_\ell(i) - W_h(i) & Z_h(i) + Z'_h(i) \end{bmatrix} > 0,$$

e multiplicando essa última desigualdade por

$$\begin{bmatrix} G_\ell^{-1'}(i) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix},$$

pela esquerda e por sua transposta à direita, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathcal{W}_\ell^{-1}(i) & * & * \\ A_\ell(i) & \mathcal{W}_h(j) - R_{\ell h}(i) & * \\ -F_\ell(i) & Z_h'B'_\ell(i) - W_h(i) & Z_h(i) + Z'_h(i) \end{bmatrix} > 0, \quad (52)$$

na qual  $F_\ell(i) = G_\ell^{-1}(i)Y_\ell(i)$ . Tomando combinações convexas de (52) sobre  $\ell$  e  $h$  e associando-as com  $\zeta(k+n)$  e  $\zeta(k+n+1)$ , respectivamente, como foi feito na demonstração do Lema 3.1, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\zeta(k+n)}^{-1}(i) & * & \dots \\ \mathbf{A}_{\zeta(k+n)}(i) & \mathbf{W}_{\zeta(k+n)}(j) - R(i) & \dots \\ -\mathbf{F}_{\zeta(k+n)}(i) & \mathbf{Z}'_{\zeta(k+n+1)}(i)\mathbf{B}'_{\zeta(k+n)}(i) - \mathbf{W}_{\zeta(k+n+1)}(i) & \dots \\ & * & \\ & * & \\ \mathbf{Z}_{\zeta(k+n+1)}(i) + \mathbf{Z}'_{\zeta(k+n+1)}(i) & & \end{bmatrix} > 0, \quad (53)$$

sendo

$$R(i) = \mathbf{B}_{\zeta(k+n)}(i)\mathbf{W}_{\zeta(k+n+1)}(i) + \mathbf{W}'_{\zeta(k+n+1)}(i)\mathbf{B}'_{\zeta(k+n)}(i).$$

Multiplicando (53) por

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \\ 0 & -\mathbf{B}'_{\zeta(k+n)}(i) \end{bmatrix}$$

pela direita e por sua transposta à esquerda, segue que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\zeta(k+n)}^{-1}(i) & * \\ \mathbf{A}_{\zeta(k+n)}(i) + \mathbf{B}_{\zeta(k+n)}(i)\mathbf{F}_{\zeta(k+n)}(i) & \mathbf{W}_{\zeta(k+n+1)}(j) \end{bmatrix} > 0.$$

Utilizando o complemento de Schur, a última desigualdade implica que

$$\begin{aligned} & \mathbb{W}_{\bar{\zeta}(k+n)}^{-1}(i) - \left[ \mathbf{A}_{\bar{\zeta}(k+n)}(i) + \mathbf{B}_{\bar{\zeta}(k+n)}(i) \mathbf{F}_{\bar{\zeta}(k+n)}(i) \right]' \mathbb{W}_{\bar{\zeta}(k+n+1)}^{-1}(j) \\ & \quad \times \left[ \mathbf{A}_{\bar{\zeta}(k+n)}(i) + \mathbf{B}_{\bar{\zeta}(k+n)}(i) \mathbf{F}_{\bar{\zeta}(k+n)}(i) \right] \geq 0, \end{aligned}$$

multiplicando à esquerda por  $x'(k+n|k)$  e à direita por  $x(k+n|k)$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} & x'(k+n|k) \left\{ \mathbb{W}_{\bar{\zeta}(k+n)}^{-1}(i) - \left[ \mathbf{A}_{\bar{\zeta}(k+n)}(i) + \mathbf{B}_{\bar{\zeta}(k+n)}(i) \mathbf{F}_{\bar{\zeta}(k+n)}(i) \right]' \mathbb{W}_{\bar{\zeta}(k+n+1)}^{-1}(j) \right. \\ & \quad \left. \times \left[ \mathbf{A}_{\bar{\zeta}(k+n)}(i) + \mathbf{B}_{\bar{\zeta}(k+n)}(i) \mathbf{F}_{\bar{\zeta}(k+n)}(i) \right] \right\} \times x(k+n|k) \geq 0, \end{aligned}$$

a qual corresponde à desigualdade (45).  $\square$

O MPC robusto com restrições nas entradas e estados pode ser resolvido como um problema de minimização e pode ser visto como uma extensão de (42) com a inclusão do Lema 3.2 para garantir a restrição de contractividade estocástica (33). Além disso, para garantir que as restrições na entrada sejam satisfeitas em  $n = 0$  e que as restrições dos estados sejam satisfeitas para  $n = 1$ , escolhendo apropriadamente  $\tilde{u}(k)$ , é necessário considerar explicitamente (46) e (47). Especificamente, melhorias significativas podem ser obtidas, como é mostrado na Seção (3.6), considerando (49) ao invés das desigualdades da equação (21) de [47]. Finalmente, o controlador MPC robusto é, então obtido, se o seguinte problema de otimização for factível:

**Problema 3.1.**

$$\begin{aligned} & \min \quad \gamma_1 + \gamma_2 \quad (54) \\ & \gamma_1, \gamma_2, u(n), G_\ell(i), Q_\ell(i), Y_\ell(i), W_\ell(i), \mathcal{U}(i), \mathcal{X}(i) \\ & \text{sujeito a (34), (40), (41), (46) – (51)} \end{aligned}$$

A condição de estabilidade em malha fechada do sistema restrito (19)-(25) sob o controlador MPC obtido de (54) é estabelecida pelo Teorema a seguir.

**Teorema 3.2.** *Considere o seguinte MJLS incerto descrito pelas equações (19)-(25). Se existir uma solução factível do problema de otimização (54) no instante  $k$  para o estado inicial  $x(k)$  e o modo inicial  $\theta(k)$ , existirá também uma solução factível em qualquer instante  $t \geq k$  e, além disso, o controlador MPC robusto baseado no problema (54) garante estabilidade no sentido de convergência da média quadrática para o sistema em malha fechada.*

**Demonstração:** A demonstração deste Teorema segue passos similares à demonstração apresentada em [47, Teorema 2] do seguinte modo:

- (1) Primeiramente, prova-se a factibilidade recursiva: considere o MJLS descrito pelas equações (19)–(25), com estado inicial  $x(k)$  e modo inicial  $\theta(k)$ . Suponha que existe uma solução ótima para o problema de otimização (54) no instante  $k$  dada por

$$\begin{aligned} r_n^* = \{ & \gamma_1^*(k), \gamma_2^*(k), u^*(k), G_1^*(k), \dots, G_{n_\zeta}^*(k), Y_1^*(k), \dots, Y_{n_\zeta}^*(k), Q_1^*(k), \dots, Q_{n_\zeta}^*(k), \\ & Z_1^*(k), \dots, Z_{n_\zeta}^*(k), \mathcal{W}_1^*(k), \dots, \mathcal{W}_{n_\zeta}^*(k), \mathcal{U}_1^*(k), \dots, \mathcal{U}_{n_\zeta}^*(k), \mathcal{X}_1^*(k), \dots, \mathcal{X}_{n_\zeta}^*(k) \}. \end{aligned}$$

Visto que esta solução satisfaz as desigualdades (34) e (41), do Lema 3.1 obtém-se que a contractividade estocástica (33) é factível. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(k+1) - \mathbb{E}_{k+1}[\mathcal{V}(k+2)] &\geq \|x(k+1|k)\|_{\mathcal{Q}(\theta(k+1|k))}^2 \\ &\quad + \|u(k+1|k)\|_{\mathcal{R}(\theta(k+1|k))}^2 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(k+1) &\geq \mathbb{E}_{k+1}[\mathcal{V}(k+2)] + \|x(k+1|k)\|_{\mathcal{Q}(\theta(k+1|k))}^2 \\ &\quad + \|u(k+1|k)\|_{\mathcal{R}(\theta(k+1|k))}^2. \end{aligned}$$

Ademais, de (41) tem-se que  $\gamma_2^*(k) \geq \mathbb{E}_k[\mathcal{V}(k+1)]$ . Portanto, é possível concluir que:

$$\gamma_2^*(k) \geq \mathbb{E}_k \left[ \mathbb{E}_{k+1}[\mathcal{V}(k+2)] + \|x(k+1|k)\|_{\mathcal{Q}(\theta(k))}^2 + \|u(k+1|k)\|_{\mathcal{R}(\theta(k))}^2 \right]$$

para todas as realizações de incertezas em (21) e (23). Além do mais, das restrições (44) e (45), obtém-se que  $1 \geq \bar{\mathcal{V}}(k+1) \geq \bar{\mathcal{V}}(k+2)$ . Então, obtém-se a desigualdade:

$$\begin{aligned} \gamma_2^*(k) &\geq \mathbb{E}_k[\mathbb{E}_{k+1}[\mathcal{V}(k+2)] + \|x(k+1|k)\|_{\mathcal{Q}(\theta(k))}^2 + \|u(k+1|k)\|_{\mathcal{R}(\theta(k))}^2] \\ &\geq \mathbb{E}_k[\gamma_1(k+1) + \gamma_2(k+1)], \end{aligned}$$

na qual  $\gamma_2(k+1) = \max_{[A_{k+1}(\theta(k+1))B_{k+1}(\theta(k+1))]} \mathbb{E}_{k+1}[\mathcal{V}(k+2)]$ . Pode-se verificar que  $r_{k+1}^*$  é também uma solução para o problema de otimização, para o qual

$$\begin{aligned} r_{k+1}^* = &\{ \gamma_1(k+1), \gamma_2(k+1), Y_\ell^*(\theta(k+1))G_\ell^*(\theta(k+1)), G_1^*(i), \dots, G_L^*(i), \\ &Y_1^*(i), \dots, Y_L^*(i), Q_1^*(i), \dots, Q_{n_\zeta}^*(i), Z_1^*(i), \dots, Z_{n_\zeta}^*(i), \mathcal{W}_1^*(i), \dots, \mathcal{W}_{n_\zeta}^*(i), \\ &\mathcal{U}_1^*(i), \dots, \mathcal{U}_L^*(i), \mathcal{X}_1^*(i), \dots, \mathcal{X}_{n_\zeta}^*(i) \} \end{aligned}$$

Por indução, segue que o problema de otimização (54) é factível se for factível para o instante de tempo  $k$ .

- (II) Demonstração de estabilidade em malha fechada: De acordo com a definição (3.1), o sistema (19)–(25) é estável em média quadrática para um estado inicial dado  $x_0$  e modo inicial  $\theta_0$  se  $\mathbb{E}[x'(k)x(k)] \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Como  $\|x(k)\|_{\mathcal{Q}(i)}^2 + \|u(k)\|_{\mathcal{R}(i)}^2 \leq \gamma_1^*(k)$  e  $\mathbb{E}_k[\gamma_1(k+1) + \gamma_2(k+1)] \leq \gamma_2^*$ , segue que

$$\|x(k)\|_{\mathcal{Q}(i)}^2 + \|u(k)\|_{\mathcal{R}(i)}^2 + \mathbb{E}_k[\gamma_1(k+1) + \gamma_2(k+1)] \leq \gamma_1^*(k) + \gamma_2^*(k). \quad (55)$$

De acordo com o princípio de otimalidade, pela otimização no instante  $k+1$ ,  $\gamma_1(k+1) + \gamma_2(k+1)$  será ainda mais reduzido. Logo, de (55), obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_1^*(k) + \gamma_2^*(k)) &\geq \sum_{k=0}^{\infty} \left( \|x(k)\|_{\mathcal{Q}(\theta(k))}^2 + \|u(k)\|_{\mathcal{R}(\theta(k))}^2 \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E}_k[\gamma_1(k+1) + \gamma_2(k+1)] \right) \end{aligned}$$

Assim, o conjunto  $\{\gamma_1^*(k) + \gamma_2^*(k), k = 0, 1, 2, \dots\}$  é uma supermartingale [84]. Tomando o valor esperado em ambos os lados da desigualdade condicional acima para  $k = 0$ , obtém-se:

$$\mathbb{E}_0 \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_1^*(k) + \gamma_2^*(k)) \right] \geq \mathbb{E}_0 \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \|x(k)\|_{\mathcal{Q}(\theta(k))}^2 + \|u(k)\|_{\mathcal{R}(\theta(k))}^2 + \mathbb{E}_k[\gamma_1(k+1) + \gamma_2(k+1)] \right) \right]$$

isto é,

$$\gamma_1^*(0) + \gamma_2^*(0) - \mathbb{E}_0[\gamma_1(k+1) + \gamma_2(k+1)] \geq \mathbb{E}_0 \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \|x(k)\|_{\mathcal{Q}(\theta(k))}^2 + \|u(k)\|_{\mathcal{R}(\theta(k))}^2 \right) \right].$$

Portanto, pode-se concluir que  $\mathbb{E}_0 \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \|x(k)\|_{\mathcal{Q}(\theta(k))}^2 + \|u(k)\|_{\mathcal{R}(\theta(k))}^2 \right) \right]$  é limitado superiormente. Além disso, para todo  $k$  tal que  $x(k) \neq 0$ ,

$$\mathbb{E}_0 \left[ \|x(k)\|_{\mathcal{Q}(\theta(k))}^2 + \|u(k)\|_{\mathcal{R}(\theta(k))}^2 \right] > 0.$$

Então  $\mathbb{E}_0 \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \|x(k)\|_{\mathcal{Q}(\theta(k))}^2 + \|u(k)\|_{\mathcal{R}(\theta(k))}^2 \right) \right]$  é o valor esperado de uma soma infinita de uma sequência de termos positivos e é limitado superiormente. Assim sendo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}_0 \left[ \|x(k)\|_{\mathcal{Q}(i)}^2 + \|u(k)\|_{\mathcal{R}(i)}^2 \right] = 0$$

o que implica que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}_0 [\|x(k)\|^2] = 0$ , pois  $\mathcal{Q}(\theta(k))$  e  $\mathcal{R}(\theta(k))$  são matrizes positivas definidas. Ante o exposto obtém-se estabilidade no sentido de convergência em média quadrática para o sistema (19)–(25).  $\square$

### 3.5 EXTENSÃO DO MPC ROBUSTO PARA O CASO MULTI-PASSOS

Os Teoremas 1 e 2 neste capítulo podem ser adaptados para abranger o caso multi-passos de lei de controle por realimentação de estados dependente do modo (30) de maneira similar ao caso investigado em [47].

Uma estratégia possível para obter condições suficientes para resolver o problema (26) neste caso, é simplesmente reescrever algumas variáveis de uma forma apropriada nos Lemas 3.1 e 3.2. De fato, é suficiente substituir, nesses Lemas,  $Y_\ell(i)$  por  $Y_\ell^n(i)$ ,  $Q_\ell(i)$  por  $Q_\ell^n(i)$  e  $G_\ell(i)$  por  $G_\ell^n(i)$ , para todo  $\ell = 1, \dots, n_\xi$ ,  $n = 1, \dots, N$  e  $i \in \Theta_+^{j,\tau}$ . Além disso, na LMI (34)  $\hat{Q}_{\ell h}(\alpha)$  é substituído por  $\hat{Q}_{\ell h}^{n+1}(\alpha) = p^{-1}(i, \alpha; \tau) Q_h^{n+1}(\alpha) - R_{\ell h}(i)$ , e na LMI (48)  $\mathcal{W}_\ell(i)$  é substituído por  $\mathcal{W}_\ell^1(i)$ . Além de que, as matrizes de Lyapunov,  $\mathbf{P}_{\xi(k+n)}^n(i)$  de (31) são substituídas por

$$\mathbf{P}_{\xi(k+n)}^n(i) = \sum_{\ell=1}^{n_\xi} \xi_\ell(k+n) P_\ell^n(i), \quad \forall i \in \Theta, \quad \forall n \geq 1,$$

nas quais, para  $n \geq N$ ,  $\mathbf{P}_{\xi(k+n)}^n(i) = \mathbf{P}_{\xi(k+n)}^N(i)$ . O mesmo é feito para as matrizes de Lyapunov  $\mathbf{W}_{\xi(k+n)}(i)$  in (43) que são substituídas por

$$\mathbf{W}_{\xi(k+n)}^{-n}(i) = \sum_{\ell=1}^{n_{\xi}} \xi_{\ell}(k+n) \mathbf{W}_{\ell}^{-n}(i), \quad \forall i \in \Theta, \quad \forall n \geq 1,$$

sendo que para  $n \geq N$  e  $j \in \Theta$ ,  $\mathbf{W}_{\xi(k+n)}^{-n}(i) = \mathbf{W}_{\xi(k+n)}^{-N}(i)$ . Levando em conta essas modificações com respeito a  $n$ , podem ser obtidas novas condições baseadas em LMIs menos conservativas para controle de realimentação de estados multi-passos dependentes do modo de Markov de uma maneira similar àquela que foi feita em [47], com a possível desvantagem de se ter que otimizar um número de matrizes de realimentação  $n_{\xi}$  vezes maior.

### 3.6 ESTUDO DE CASOS

Nesta seção são apresentadas três exemplos para ilustrar a efetividade do método proposto. Em todos os exemplos, adota-se o sistema linear com saltos Markovianos com três modos de operação, adaptado de [15] e [47].

Para o modo  $i = 1$ , as matrizes do sistema são dadas por:

$$A_1(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.6 & 3.3 \end{bmatrix}, \quad A_2(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.4 & 3.1 \end{bmatrix}, \quad B_1(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$B_2(1) = B_1(1).$$

Para o modo  $i = 2$ , as matrizes do sistema são:

$$A_1(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4.4 & 4.6 \end{bmatrix}, \quad A_2(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4.2 & 4.6 \end{bmatrix}, \quad B_1(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$B_2(2) = B_1(2).$$

E finalmente, para o modo  $i = 3$ , as matrizes do sistema são:

$$A_1(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5.4 & -5.3 \end{bmatrix}, \quad A_2(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5.2 & -5.1 \end{bmatrix}, \quad B_1(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$B_2(3) = B_1(3).$$

As matrizes de ponderação simétricas para os modos  $i = 1, 2$  e  $3$  são dadas, respectivamente por:

$$\mathcal{Q}(1) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q}(2) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q}(3) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & .011 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{R}(1) = \mathcal{R}(2) = \mathcal{R}(3) = 0.01.$$

Os vértices da matriz e probabilidades de transição são:

$$\mathcal{P}^1 = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.23 & 0.22 \\ 0.36 & 0.35 & 0.29 \\ 0.32 & 0.16 & 0.52 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.79 & 0.11 & 0.10 \\ 0.27 & 0.53 & 0.20 \\ 0.23 & 0.07 & 0.70 \end{bmatrix}$$

O exemplo acima é uma adaptação do exemplo de [47], também adaptado de [6], baseado no modelo macroeconômico multiplicador-acelerador de Samuelson, publicado em 1939. Em [6], são usados dados reais do Departamento de Comércio dos Estados Unidos (1971) dos anos de 1929 a 1971 dispostos na Tabela 1 em que o parâmetro  $s$  representa a tendência marginal para a poupança sendo  $\frac{1}{s}$  o multiplicador,  $w$  é o coeficiente de aceleração relacionando o investimento privado induzido pela variação do produto interno bruto comparado com os períodos anteriores. Os modos são  $i = 1, 2, 3$  denotando respectivamente, os modos "normal", "expansão" e "depressão".

Tabela 1: Modos de operação do modelo multiplicador-acelerador de Samuelson.

Modo $i$	Nome	Descrição	$w_i$	$s_i$
1	Normal	Nível médio para $s$ e $w$	2.5	0.3
2	Expansão	Nível alto para $w$ e baixo para $s$	47.3	-0.7
3	Depressão	Nível baixo para $w$ e alto para $s$	-5.3	0.9

### 3.6.1 Caso 1

O primeiro exemplo segue diretamente do MPC com restrições considerando um passo, ou seja,  $N = 1$  (controlador III) do exemplo dado em [47]. Neste caso particular, o valor máximo da entrada é 1; isto é,  $\bar{u}(i) = 1, i \in \Theta$ ; o estado inicial  $x_0 = [1 \ 1]'$ , o modo inicial é  $\theta_0 = 1$  e 250 realizações possíveis da cadeia de Markov foram consideradas.

A Figura 3 retrata a resposta média ao estado do sistema MJLS sob o controlador III, projetado usando a abordagem proposta em [47] (deste ponto em diante denominado *original*) e usando a sequência de controle obtida por meio do problema de otimização (54) na abordagem MPC. Note que uma resposta de estado rápida foi obtida utilizando o controlador proposto. A média da entrada de controle é mostrada na Figura 4.

Para ilustrar que o novo controlador alcança melhores resultados, o custo de controle para ambos os controladores foi calculado e é mostrado <sup>1</sup>

O controlador proposto obtido pelo problema de minimização (54) foi testado em muitos outros exemplos adotados de [47] e o desempenho foi, ao menos igual ao desempenho do controlador em [47]. Por exemplo, se  $N = 3$  é escolhido os resultados usando o controlador IV de [47] e aquele obtido usando a extensão MPC multi-passos em (54), como discutido na Seção 3.5,

<sup>1</sup> Note que os resultados para o custo médio apresentados na Tabela 2 são um pouco maiores que em [47] devido à simulação mais longa, 100 em vez de 80, e ao maior número de realizações, 250 em vez de 100.

Tabela 2: Custo médio aproximado sobre as 250 realizações para um passo  $N = 1$ .

[47] – controlador III	controlador MPC proposto
0.1744	0.1599

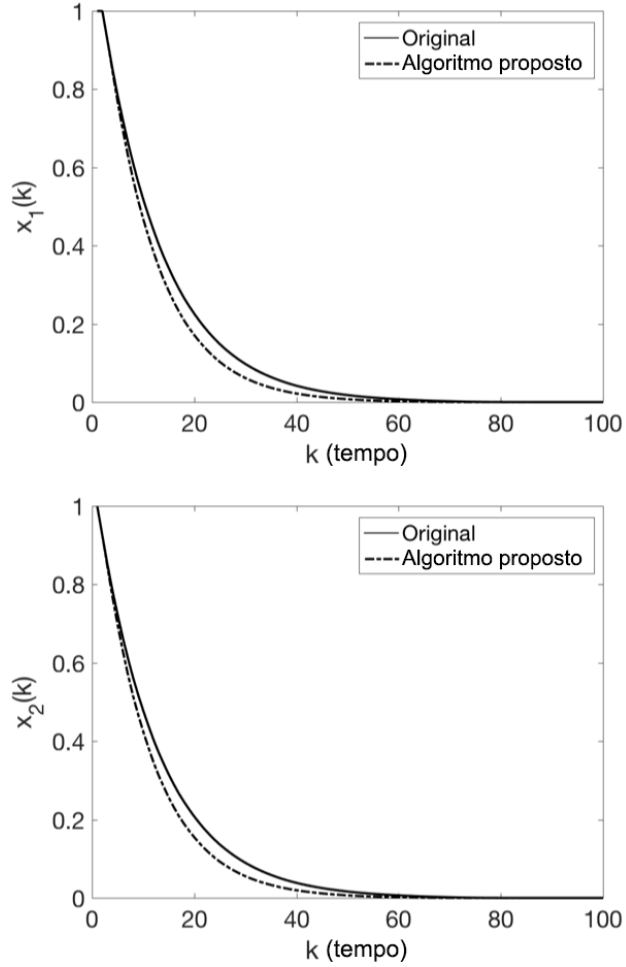


Figura 3: Resposta ao estado: Figure 1)  $x_1(k)$  e Figure 2)  $x_2(k)$ . A linha contínua indica a resposta média ao estado utilizando o controlador III em [47] e a linha pontilhada indica a resposta média ao estado utilizando (54).

são bastante semelhantes, com uma vantagem maior para o primeiro no que diz respeito ao custo computacional.

### 3.6.2 Caso 2

Neste exemplo foi feita uma pequena mudança na matriz de controle  $B$ , de um dos modos do exemplo anterior, isto é,  $B_1(2) = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 1 \end{bmatrix}$  é considerada em vez de  $B_1(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , para o controlador usando um passo ( $N = 1$ ). Nesta nova situação a região máxima de factibilidade usando o controlador proposto pelo problema de minimização (54) na abordagem MPC é maior que a região calculada usando o controlador III dada em [47] (isto é, usando o *original*) como pode ser visto na Figura 5. Vale ressaltar que usando solvers diferentes tais como LMILab, Mosek [1] e SDPT3 não fez diferença no que diz respeito a



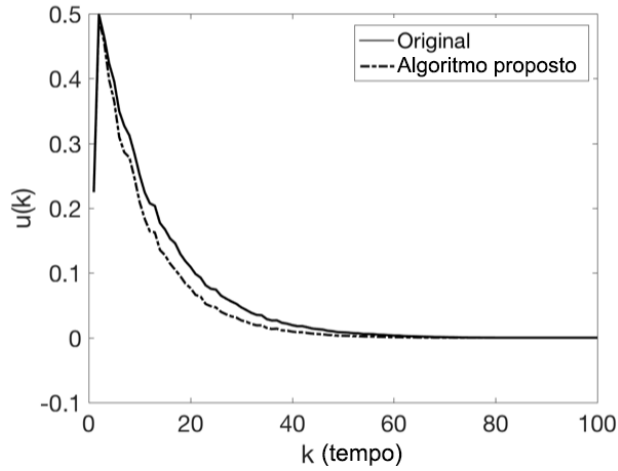


Figura 4: Entrada de controle: a linha sólida indica a média das entradas de controle usando o controlador III em [47] e a linha pontilhada indica a média da entrada de controle usando o problema de minimização (54).

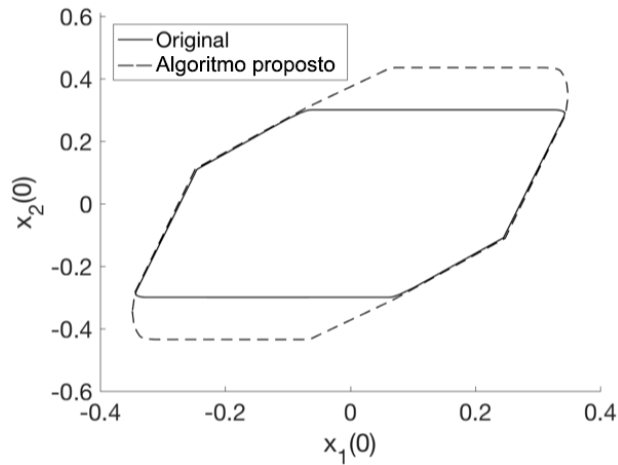


Figura 5: Região máxima de factibilidade, problema com restrição na entrada:  $\bar{u}(i) = 1, \forall i \in \Theta$ , e  $N = 1$ . O parser Yalmip [43] e o solver SeDuMi foram usados para plotar a região.

encontrar a região viável. Caso o número de passos seja definido como  $N = 3$ , a região de factibilidade máxima calculada usando a extensão MPC de várias etapas para o problema de minimização (54), foi discutido na seção 3.5, é novamente maior que a região máxima utilizando o controlador IV em [47] como pode ser visto na figura 6. Note que a região máxima de factibilidade se torna maior em ambos os controladores quando  $N$  cresce.

### 3.6.3 Caso 3

Neste exemplo, a matriz de entrada é novamente modificada para mostrar que a estratégia de controle proposta pode ainda encontrar solução quando o con-

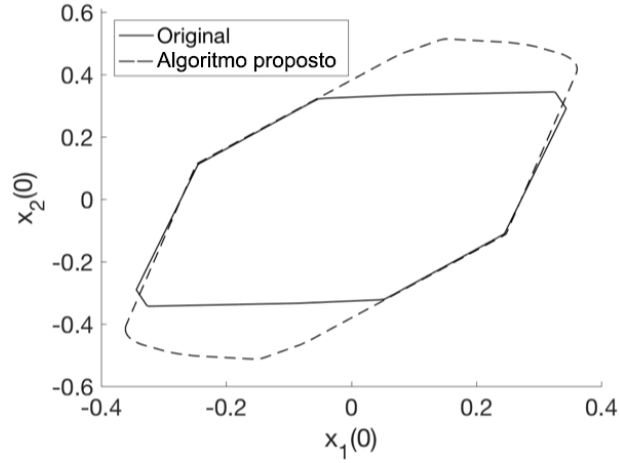


Figura 6: Região máxima de factibilidade, problema com restrição na entrada:  $\bar{u}(i) = 1, \forall i \in \Theta$ , e a extensão para o caso multi-passos  $N = 3$  no problema de otimização (54), como discutido na Seção 3.5, e o controlador IV em [47]. O parser Yalmip [43] e o parser SeDuMi foram usados para plotar a região.

trolador de [47] já não pode. As matrizes de entrada modificadas utilizadas são:

$$B_1(1) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2(1) = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.9 \end{bmatrix}, B_1(2) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2(2) = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1(3) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.85 \end{bmatrix}, B_2(3) = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.9 \end{bmatrix}.$$

A Figura 7 representa a região máxima de factibilidade para ambos os métodos no caso de um passo ( $N = 1$ ). A região encontrada usando o método em [47] não pode ser vista na figura, visto que é uma região muito pequena em torno da origem que pode ser causada por imprecisões numéricas.

Para verificar se a região máxima de factibilidade se torna maior com o aumento do número de passos à frente, a saber,  $N = 3$ , é utilizada a extensão MPC de multi-passos proposta para (54), discutida na Seção 3.5. A Figura 8 mostra um crescimento da região máxima de factibilidade para o método proposto neste trabalho. A região é maior para o controlador IV em [47] comparada com a região obtida para o caso  $N = 1$  controlador III em [47], porém, pode ser detectado que a região máxima de factibilidade ainda é pequena e reside dentro de uma região circular com raio igual a  $1 \times 10^{-4}$  em torno da origem, o que é, provavelmente, devido à imprecisão numérica.

### 3.7 PRODUÇÃO RELACIONADA

O estudo apresentado no Capítulo 3 deu origem ao artigo:

- R. O. Lopes, E. M. A. M. Mendes, L. A. Tôres and R. M. Palhares. Constrained robust model predicted control of discrete-time Markov jump linear systems. IET Control Theory & Applications [44].

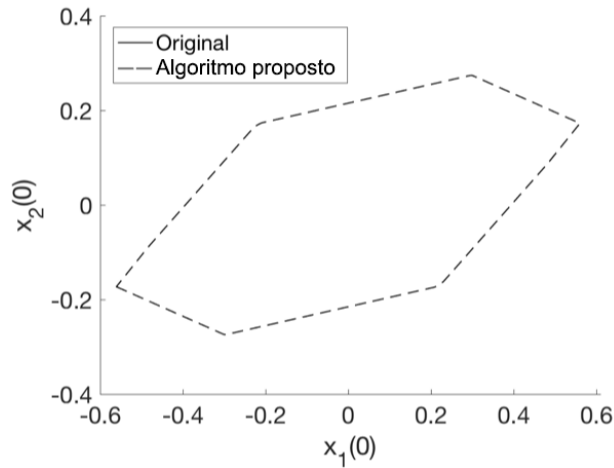


Figura 7: Região máxima de factibilidade, problema com restrição na entrada com valor máximo:  $\bar{u}(i) = 1, \forall i \in \Theta$ , com  $N = 1$  abordado por [47]. O parser Yalmip e o parser LMILab foram usados para plotar a região. A região de factibilidade calculada usando o método proposto em [47] não é visível visto que é, provavelmente, composta apenas pela origem.

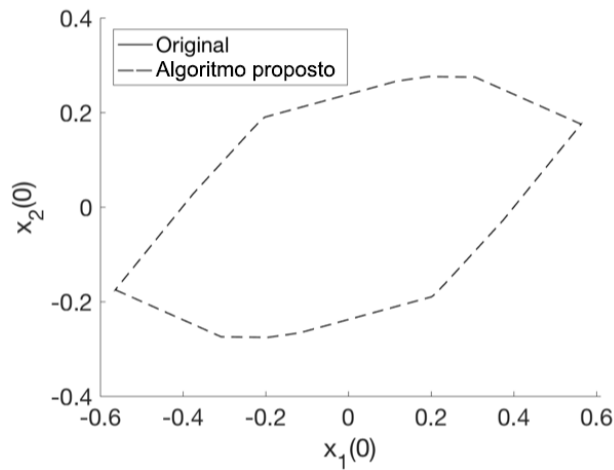


Figura 8: A região máxima de factibilidade do problema com restrição na entrada:  $\bar{u}(i) = 1, \forall i \in \Theta$ , e  $N = 3$  para ambas as abordagens em [47] e na extensão para multi-passos (54), como discutido na Seção 3.5. O parser Yalmip e o solver LMILab foram usados para plotar a região. A região máxima de factibilidade do algoritmo proposto em [47] não é visível, visto que é uma região pequena dentro de uma região circular de área igual a  $1 \times 10^{-4}$  em torno da origem.



## MPC ROBUSTO DE HORIZONTE FINITO APLICADO A MJLS SUJEITO A RUÍDO ADITIVO

Neste capítulo, desenvolve-se um algoritmo de controle preditivo robusto baseado em modelo para uma classe de sistemas lineares sujeitos a parâmetros incertos variantes no tempo, saltos Markovianos e ruído aditivo. Considera-se incertezas politópicas nas matrizes do sistema. Obtém-se condições por meio de LMIs para o projeto MPC nos casos sem restrições e com restrições de segundo momento nos estados do sistema e nas entradas de controle, respectivamente. A abordagem está baseada em uma estratégia de predição recursiva de um MPC robusto de horizonte finito, como uma tentativa de resolver o problema de controle ótimo que ainda permanece sem solução na literatura. Uma simulação numérica será dada para ilustrar a efetividade do método proposto.

### 4.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere  $(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_k\}, \mathbb{P})$ , o espaço de probabilidade com condições usuais de filtragem  $\{\mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$  [16, Seção 2.3] que regula a evolução do sistema linear de saltos Markovianos e variação de parâmetros dado pela equação:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \mathbf{A}_{\zeta(k)}(\theta(k))x(k) + \mathbf{B}_{\zeta(k)}(\theta(k))u(k) + \mathbf{H}(\theta(k))w(k), \\ k \geq k_0, x(k_0) &= x_0, \theta(k_0) \sim \mu_0, \end{aligned} \quad (56)$$

na qual,  $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ , e  $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$  denotam os estados do sistema, as entradas de controle e o ruído de distúrbio aditivo, respectivamente. O processo  $\{\theta(k); k \geq k_0\}$  representa uma cadeia de Markov discreta no tempo, tomando valores no conjunto  $\Theta = \{1, \dots, n_\theta\}$  com matriz de probabilidade de transição  $\mathbb{P} = [p(i, j)]_{i, j \in \Theta}$  em que  $p(i, j) := \Pr[\theta(k+1) = j | \theta(k) = i]$ . O processo de ruído de distúrbio aditivo  $\{w(k), k \geq k_0\}$  tem média zero e matriz de covariância  $\Sigma := \mathbb{E}[w(k)w(k)']$  para todo  $k \geq k_0$ . Além disso,  $\{w(k), k \geq k_0\}$  é independente de  $\{\theta(k), k \geq k_0\}$ . O estado da cadeia de Markov em um certo instante de tempo  $k+n, n \geq 0$  condicionado ao instante de tempo  $k$ , isto é,  $\theta(k+n|k)$  é determinado de acordo com uma distribuição  $\mu_{k+n|k} \equiv \Pr(\theta(k+n) = i | \mathfrak{F}_k)$ , em que  $i \in \Theta$ , e tal que a distribuição do estado inicial da cadeia é dada pelo vetor de dimensão  $n_\theta$  definido como:  $\mu_{k+n|k} = (\mathbb{P}')^{k+n} \mu_{k|k} = [\mu_{k+n|k}(1), \dots, \mu_{k+n|k}(i), \dots, \mu_{k+n|k}(n_\theta)]'$ .

As matrizes  $\mathbf{H}(i) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$ ,  $i \in \Theta$ , são dadas. Considerando o simplex unitário definido em (22), para cada  $\theta(k) = i \in \Theta$ , as matrizes  $\mathbf{A}_{\zeta(k)}(i)$  e  $\mathbf{B}_{\zeta(k)}(i)$  dependem dos parâmetros variantes no tempo  $\zeta(k) \in \Xi^{n_\zeta}$  são definidas em (23).

Considere o critério de custo linear quadrático de horizonte finito associado ao sistema (56), para qualquer lei de controle admissível  $u = (u(k), u(k+1), \dots, u(k+N-1))$ , como:

$$J_N^k(u) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E} \left[ x'(k+n) \mathcal{Q}(\theta(k+n)) x(k+n) + u'(k+n) \mathcal{R}(\theta(k+n)) \times u(k+n) \right] + \mathbb{E} \left[ x'(N) \tilde{\mathcal{Q}}(\theta(N)) x(N) \right], \quad (57)$$

em que  $N < \infty$  representa um horizonte de predição de  $N$  estágios; as matrizes de ponderações são  $\tilde{\mathcal{Q}}(\theta(N)) \in \mathcal{S}^{n_x^0}$ ,  $\mathcal{Q}(\theta(k+n)) \in \mathcal{S}^{n_x^0}$ , e  $\mathcal{R}(\theta(k+n)) \in \mathcal{S}^{n_u^+}$ , com  $n = 0, \dots, N-1$ . O princípio de horizonte retrocedente será aplicado, ou seja, o custo (57) sujeito às restrições de segundo momento dadas por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(k)x(k)'] &\leq \mathcal{X}_{max}, k \geq k_0, \\ \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [u(k)u(k)'] &\leq \mathcal{U}_{max}, k \geq k_0, \end{aligned} \quad (58)$$

nas quais  $\mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[\cdot] := \mathbb{E}[\cdot | x(k_0) = x_0, \theta(k_0) \sim \mu_0]$ , deve ser minimizado em cada instante de tempo  $k \geq k_0$ .

O problema descrito acima é uma formulação popular de um problema de regulação que tem o objetivo de manter o estado do sistema próximo à origem. A função de custo quadrático induz uma penalidade alta para grandes desvios do estado a partir da origem e para ações de controle de grande intensidade, mas uma penalidade relativamente pequena para pequenos desvios e ações de controle de baixa intensidade. Além disso, o custo quadrático leva a uma boa solução analítica ([4, pág. 130]).

**Problema 4.1.** *O problema de controle ótimo é o de encontrar  $u^*$  tal que*

$$u^* = \arg \min_u J_N^k(u), \text{ sujeito a (56) e (58).}$$

Para buscar uma solução para esse problema, utiliza-se a estratégia de horizonte retrocedente, combinada com uma lei de controle dependente do tempo e do modo escrita como realimentação linear de estados na forma:

$$u(k+n) = F_{k+n}(\theta(k+n))x(k+n), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (59)$$

Isto é, para cada instante de tempo  $k \geq k_0$ , aplicando-se a lei de controle (59), uma sequência  $\{F_{k+n}(\theta(k+n))\}$ ,  $n = 0, \dots, N-1$  é obtida e uma solução subótima para o Problema de Controle Ótimo 4.1 é encontrada. Apenas a primeira entrada  $u(k) = F_k(\theta(k))x(k)$  é implementada, e a otimização é repetida no próximo instante de tempo  $k+1$ , desta vez baseando-se no novo estado  $x(k+1)$ .

**Observação 4.1.** *A novidade da abordagem proposta está no fato de que o Problema 4.1 considera robustez que depende de conjuntos politópicos variantes no tempo. O Problema 4.1 ainda está aberto na literatura porque não existe uma solução algébrica. Desta forma, mais uma contribuição nesta tese é desenvolver condições por meio de desigualdades matriciais lineares para se obter uma cota superior para a função custo, ou seja, uma sequência de controle  $\hat{u} = \{\hat{u}_k, \hat{u}_{k+1}, \dots, \hat{u}_{k+N-1}\}$  tal que  $\min_u J_N^k(u) \leq J_N^k(\hat{u})$ , supondo que os modos de Markov estão disponíveis para o controlador.*

Para toda sequência  $M \in \mathbb{S}^{n+}$  o operador  $\mathcal{E}(M) = (\mathcal{E}_1(M), \dots, \mathcal{E}_{n_\theta}(M))$  é definido como em [15]:

$$\mathcal{E}_i(M) := \sum_{j=1}^{n_\theta} p(i, j)M(j). \quad (60)$$

A próxima seção apresenta resultados preliminares que dão suporte aos resultados principais.

## 4.2 RESULTADOS AUXILIARES

Para simplificar a notação, em tudo que segue supõe-se que o estágio inicial  $k_0 = 0$ , de modo que  $J_N^k(u) = J_N^0(u)$ .

Suponha que  $x(q) = x \in \mathbb{R}^{n_x}$  e  $\theta(q) = i \in \Theta$  são conhecidos para algum  $q \in \{0, \dots, N-1\}$ . Então o custo parcial ou intermediário (em Inglês “cost-to-go”) associado ao funcional (57) fica sendo

$$\begin{aligned} J_{N,q}(u) := & \sum_{n=q}^{N-1} \mathbb{E} \left[ x'(n) \mathcal{Q}(\theta(n))x(n) + u'(n) \mathcal{R}(\theta(n))u(n) \mid x(q) = x, \theta(q) = i \right] \\ & + \mathbb{E} \left[ x'(N) \tilde{\mathcal{Q}}(\theta(N))x(N) \mid x(q) = x, \theta(q) = i \right], \end{aligned} \quad (61)$$

com entradas de controle da forma  $u(n) = F_n(\theta(n))x(n)$ ,  $n = q, \dots, N-1$ .

Note de (57) e (61) que  $J_N^0(u) = J_{N,0}(u)$ . Além disso, substituindo (59) em (61) obtém-se

$$\begin{aligned} J_{N,q}(u) = & \sum_{n=q}^{N-1} \mathbb{E} \left[ x'(n) \left( \mathcal{Q}(\theta(n)) + F_n'(\theta(n)) \mathcal{R}(\theta(n)) F_n(\theta(n)) \right) x(n) \mid \right. \\ & \left. x(q) = x, \theta(q) = i \right] + \mathbb{E} \left[ x'(N) \tilde{\mathcal{Q}}(\theta(N))x(N) \mid x(q) = x, \theta(q) = i \right]. \end{aligned} \quad (62)$$

Objetivando lançar mão do princípio da otimalidade de Bellman [5], o problema de minimizar a função custo  $J_N^k(u)$  dada por (57) será transformado em um problema intermediário, em que o desempenho da função de custo intermediário (61) de  $N - q$  estágios (reverso em  $q$ ) deve ser otimizado. Para este fim, funcionais auxiliares  $\mathcal{V}_n : \mathbb{R}^{n_x} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}_+$  são definidos tais que:

$$\mathcal{V}_n(x(n), \theta(n)) = x'(n)P_n(\theta(n))x(n) + \alpha_n(\theta(n)), \quad n = 0, \dots, N, \quad (63)$$

nos quais as matrizes  $P_n(i)$ , e escalares  $\alpha_n(i)$ ;  $i = 1, \dots, n_\theta$ ,  $n = 0, \dots, N$ ; devem satisfazer a recorrência:

$$\begin{aligned} P_n(i) &= \mathcal{Q}(i) + F_n'(i) \mathcal{R}(i) F_n(i) + \bar{A}_n'(i) \mathcal{E}_i(P_{n+1}) \bar{A}_n(i), \quad n = 0, \dots, N-1, \\ P_N(i) &= \tilde{\mathcal{Q}}(i) \end{aligned} \quad (64)$$

e,  $F_n(i)$ ,  $i = 1, \dots, n_\theta$ ,  $n = 0, \dots, N-1$  são dados, com  $\bar{A}_n(i) = \mathbf{A}_{\xi(n)}(i) + \mathbf{B}_{\xi(n)}(i)F_n(i)$ , e

$$\begin{aligned} \alpha_n(i) &= \mathcal{E}_i(\alpha_{n+1}) + \text{Tr} \{ H'(i) \mathcal{E}_i(P_{n+1}) H(i) \Sigma \}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ \alpha_N(i) &= 0. \end{aligned} \quad (65)$$

O próximo resultado representa um passo importante para a demonstração da principal contribuição deste capítulo, pois garante que  $\mathcal{V}_q(x(q), \theta(q))$  é igual a  $J_{N,q}(u)$  sempre que  $\mathfrak{F}_q = \{x(q), \theta(q)\}$ .

**Lema 4.1.** *Fixe  $q \in \{0, \dots, N\}$ , e assuma que o par  $(\theta(q), x(q))$  é conhecido. Então*

$$J_{N,q}(u) = \mathcal{V}_q(x(q), \theta(q)). \quad (66)$$

**Demonstração:** Indução reversa sobre  $n$  é usada nesta prova. Para a condição inicial  $n = N$ , obtém-se de (63) que

$$\mathcal{V}_N(x(N), \theta(N)) = x'(N)P_N(\theta(N))x(N) + \alpha_N(\theta(N)). \quad (67)$$

Visto que  $\alpha_N(i) = 0$  em (65) e  $P_N(i) = \tilde{Q}(i)$  em (64), segue que o lado direito de (67) é igual a

$$x'(N)P_N(\theta(N))x(N) = \mathcal{V}_N(x(N)),$$

e, portanto,  $J_{N,N}(u) = \mathcal{V}_N(x(N), \theta(N))$ . Este argumento demonstra o resultado em (66) para  $q = N$ .

Agora, assuma que  $J_{N,q+1}(u) = \mathcal{V}_{q+1}(x(q+1), \theta(q+1))$ . Esta hipótese é usada para mostrar a validade de (66). De fato,

$$\begin{aligned} J_{N,q}(u) &= \sum_{n=q}^{N-1} \mathbb{E} [x'(n)\mathcal{Q}(\theta(n))x(n) + u'(n)\mathcal{R}(\theta(n))u(n) \mid \mathfrak{F}_q] \\ &\quad + \mathbb{E} [x'(N)\tilde{Q}(\theta(N))x(N) \mid \mathfrak{F}_q] \\ &= x'(q)\mathcal{Q}(\theta(q))x(q) + u'(q)\mathcal{R}(\theta(q))u(q) \\ &\quad + \sum_{n=q+1}^{N-1} \mathbb{E} [x'(n)\mathcal{Q}(\theta(n))x(n) + u'(n)\mathcal{R}(\theta(n))u(n) \mid \mathfrak{F}_q] \\ &\quad + \mathbb{E} [x'(N)\tilde{Q}(\theta(N))x(N) \mid \mathfrak{F}_q] \\ &= x'(q)\mathcal{Q}(\theta(q))x(q) + u'(q)\mathcal{R}(\theta(q))u(q) + \mathbb{E} [J_{N,q+1}(u) \mid \mathfrak{F}_q], \\ &= x'(q)\mathcal{Q}(\theta(q))x(q) + u'(q)\mathcal{R}(\theta(q))u(q) \\ &\quad + \mathbb{E} [\mathcal{V}_{q+1}(x(q+1), \theta(q+1)) \mid \mathfrak{F}_q]. \end{aligned}$$

Usando (59), com  $\theta(q) = i$ , resulta que

$$\begin{aligned} J_{N,q}(u) &= x'(q)((\mathcal{Q}(i) + F'_q(i)\mathcal{R}(i)F_q(i))x(q) + \mathbb{E}[\mathcal{V}_{q+1}(x(q+1), \theta(q+1)) \mid \mathfrak{F}_q]) \\ &= x'(q)((\mathcal{Q}(i) + F'_q(i)\mathcal{R}(i)F_q(i))x(q) \\ &\quad + \mathbb{E}[x'(q+1)P_{q+1}(\theta(q+1))x(q+1) \mid \mathfrak{F}_q] + \mathbb{E}[\alpha_{q+1}(\theta(q+1)) \mid \mathfrak{F}_q]). \end{aligned} \quad (68)$$

Por outro lado, a partir de (56) e (59), tem-se que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[x'(q+1)P_{q+1}(\theta(q+1))x(q+1) \mid x(q) = x, \theta(q) = i] \\ &= x'(q)\bar{A}'_q(i)\mathcal{E}_i(P_{q+1})\bar{A}_q(i)x(q) + \text{Tr}\{H'(i)\mathcal{E}_i(P_{q+1})H(i)\Sigma\}. \end{aligned} \quad (69)$$



Finalmente, pode-se concluir de (68) e (69), que

$$J_{N,q}(u) = x'(q)(\mathcal{Q}(i) + F'_q(i)\mathcal{R}(i)F_q(i) + \bar{A}'_q(i)\mathcal{E}_i(P_{q+1})\bar{A}_q(i))x(q) \\ + \text{Tr}\{H'(i)\mathcal{E}_i(P_{q+1})H(i)\Sigma\} + \mathcal{E}_i(\alpha_{q+1}),$$

e

$$J_{N,q}(u) = \mathcal{V}_q(x(q), \theta(q)) = x(q)'P_q(i)x(q) + \alpha_q(i).$$

O próximo resultado mostra uma maneira de avaliar um limitante superior para a função de custo intermediário em (61) resolvendo o problema de factibilidade a seguir.

**Problema 4.2.** *Seja  $q \in \{0, \dots, N-1\}$  e fixe  $\theta(q) \in \Theta$ ,  $x(q) \in \mathbb{R}^{n_x}$ . Considere  $F_n(i) \in \mathbb{R}^{1 \times n_x}$  dados,  $\hat{P}_n(i) \in \mathcal{S}^{n_x+}$ ,  $\hat{\alpha}_n(i) > 0$  variáveis;  $i = 1, \dots, n_\theta$  e  $n = q, \dots, N-1$ . Encontre  $\gamma_q \geq 0$  tal que:*

$$\gamma_q > x'(q)\hat{P}_q(\theta(q))x(q) + \hat{\alpha}_q(\theta(q)), \quad (70)$$

$$\hat{P}_n(i) > \mathcal{Q}(i) + F'_n(i)\mathcal{R}(i)F_n(i) + \bar{A}'_n(i)\mathcal{E}_i(\hat{P}_{n+1})\bar{A}_n(i), \quad (71)$$

$$\hat{P}_N(i) = \hat{\mathcal{Q}}(i),$$

$$\hat{\alpha}_n(i) > \mathcal{E}_i(\hat{\alpha}_{n+1}) + \text{Tr}\{H'(i)\mathcal{E}_i(\hat{P}_{n+1})H(i)\Sigma\}, \quad (72)$$

$$\hat{\alpha}_N(i) = 0.$$

O próximo Lema apresenta um limitante superior para a função custo  $J_{N,q}(u)$  em (61), utilizando o Problema 4.2.

**Lema 4.2.** *Se  $\theta(q) \in \Theta$  e  $x(q) \in \mathbb{R}^{n_x}$  são dados para algum  $q \in \{0, \dots, N-1\}$ , então*

$$\gamma_q > \mathcal{V}_q(x(q), \theta(q)) = J_{N,q}(u).$$

A prova do Lema 4.2 é imediata e será omitida.

A próxima seção apresenta o método com o qual se calcula a sequência subótima  $\hat{u}$  comentada na Observação 4.1 (pág.36).

### 4.3 CASO SEM RESTRIÇÕES

Com os resultados da seção anterior e adaptando adequadamente o desenvolvimento teórico do Lema 3.1 do Capítulo 3 para apresentar o contexto, a principal contribuição desta seção pode ser apresentada no próximo teorema.

**Teorema 4.1.** *Seja  $p(i, j) > 0$  para todos  $i, j \in \Theta$ . Se existirem matrizes  $S_n(i)$ ,  $\mathcal{O}_{n+1}(i) \in \mathcal{S}^{n_x+}$  e matrizes  $G_n(i)$ ,  $Y_n(i)$ ,  $W_h(i)$ ,  $Z_h(i)$ , escalares  $\alpha_n(i)$ ; para  $n = 0, \dots, N-1$ ;  $\ell, h = 1, \dots, n_{\bar{\xi}}$  e  $i \in \Theta$ ; e existir um escalar  $\gamma_0 \geq 0$ , tais que sejam factíveis as desigualdades matriciais lineares:*

$$\left[ \begin{array}{ccccccc} G'_n(i) + G_n(i) - S_n(i) & * & \dots & * & * & * & * \\ A_\ell(i)G_n(i) & \hat{S}_{\ell h}^n(1) & \dots & * & * & * & * \\ A_\ell(i)G_n(i) & -R_{\ell h}(i) & \dots & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_\ell(i)G_n(i) & -R_{\ell h}(i) & \dots & \hat{S}_{\ell h}^n(n_\theta) & * & * & * \\ \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}}(i)G_n(i) & 0 & \dots & 0 & \mathcal{I} & * & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}(i)Y_n(i) & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathcal{I} & * \\ -Y_n(i) & \hat{Z}_{\ell h}(i) & \dots & \hat{Z}_{\ell h}(i) & 0 & 0 & Z'_h(i) + Z_h(i) \end{array} \right] > 0 \quad (73)$$

sendo que,

$$\begin{aligned}
S_N(i) &= \tilde{Q}^{-1}(i) \\
\hat{S}_{\ell h}^n(j) &= \frac{1}{p(i,j)} S_{n+1}(j) - R_{\ell h}(i), \quad k = 1, \dots, n_\theta, \\
R_{\ell h}(i) &= B_\ell(i) W_h(i) + W_h'(i) B_\ell'(i), \quad \hat{Z}_{\ell h}(i) = Z_h'(i) B_\ell'(i) - W_h(i); \\
\alpha_n(i) - \mathcal{E}_i(\alpha_{n+1}) - \text{Tr}\{\mathcal{O}_{n+1}(i)\} &> 0; \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (74)
\end{aligned}$$

em que  $\alpha_N(i) = 0; i \in \Theta$ ;

$$\begin{bmatrix}
\mathcal{O}_{n+1}(i) & * & \dots & * \\
p(i,1)^{\frac{1}{2}} H'(i) \Sigma^{\frac{1}{2}} & S_{n+1}(1) & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 \\
p(i, n_\theta)^{\frac{1}{2}} H'(i) \Sigma^{\frac{1}{2}} & 0 & \dots & S_{n+1}(n_\theta)
\end{bmatrix} > 0; \quad (75)$$

$$\begin{bmatrix}
\gamma_0 - \alpha_0(\theta_0) & * \\
x_0 & S_0(\theta_0)
\end{bmatrix} > 0, \quad (76)$$

para  $\theta_0 \in \Theta$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$  dados. Então para

$$\gamma^* = \inf \gamma_0, \quad (77)$$

tem-se que

$$\min_u J_{N,0}(u) < \gamma^*, \quad (78)$$

sendo  $F_n(i) = Y_n(i) G_n^{-1}(i), \forall i \in \Theta$ .

**Demonstração:** Suponha as LMIs em (73) factíveis para matrizes simétricas definidas positivas  $S_n(i)$  e matrizes  $G_n(i)$  e  $Y_n(i)$  de dimensões apropriadas. Portanto, é possível concluir que  $G_n'(i) + G_n(i) - S_n(i) > 0$ , e visto que  $S_n(i)$  é positiva definida,  $G_n(i)$  é não singular. Note que

$$\begin{aligned}
[G_n(i) - S_n(i)]' S_n^{-1}(i) [G_n(i) - S_n(i)] &= G_n'(i) S_n^{-1}(i) G_n(i) - G_n'(i) - G_n(i) \\
&\quad + S_n(i) \geq 0,
\end{aligned}$$

isto é,  $G_n'(i) S_n^{-1}(i) G_n(i) \geq G_n'(i) + G_n(i) - S_n(i) > 0$ , a LMI (73) implica que

$$\begin{bmatrix}
G_n'(i) S_n^{-1}(i) G_n(i) & * & \dots & * & * & * & * \\
A_\ell(i) G_n(i) & \hat{S}_{\ell h}^n(1) & \dots & * & * & * & * \\
A_\ell(i) G_n(i) & -R_{\ell h}(i) & \dots & * & * & * & * \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_\ell(i) G_n(i) & -R_{\ell h}(i) & \dots & \hat{S}_{\ell h}^n(n_\theta) & * & * & * \\
Q^{\frac{1}{2}}(i) G_n(i) & 0 & \dots & 0 & \mathcal{I} & * & * \\
\mathcal{R}^{\frac{1}{2}}(i) Y_n(i) & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathcal{I} & * \\
-Y_n(i) & \hat{Z}_{\ell h}(i) & \dots & \hat{Z}_{\ell h}(i) & 0 & 0 & Z_h'(i) + Z_h(i)
\end{bmatrix} > 0. \quad (79)$$

Multiplicando (79) por

$$\begin{bmatrix} G_n'^{-1}(i) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathcal{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix}$$

à esquerda e por sua transposta à direita obtém-se

$$M_{\ell h}^n(i) = \begin{bmatrix} S_n^{-1}(i) & * & \dots & * & * & * & * \\ A_\ell(i) & \hat{S}_{\ell h}^n(1) & \dots & * & * & * & * \\ A_\ell(i) & -R_{\ell h}(i) & \dots & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_\ell(i) & -R_{\ell h}(i) & \dots & \hat{S}_{\ell h}^n(n_\theta) & * & * & * \\ \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}}(i) & 0 & \dots & 0 & \mathcal{I} & * & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}(i)F_n(i) & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathcal{I} & * \\ -F_n(i) & \hat{Z}_{\ell h}(i) & \dots & \hat{Z}_{\ell h}(i) & 0 & 0 & Z_h'(i) + Z_h(i) \end{bmatrix} > 0, \quad (80)$$

na qual  $F_n(i) = Y_n(i)G_n^{-1}(i)$ . Escolha ambos  $\zeta(n)$  e  $\zeta(n+1)$  de  $\Xi^{n_\zeta}$  em (22) tais que

$$\mathbf{A}_{\zeta(n)}(i) = \sum_{\ell=1}^{n_\zeta} \zeta_\ell(n) A_\ell(i) \text{ e } \mathbf{A}_{\zeta(n+1)}(i) = \sum_{h=1}^{n_\zeta} \zeta_h(n+1) A_h(i).$$

Defina a matriz

$$M^n(i) = \sum_{h=1}^{n_\zeta} \zeta_h(n+1) \left[ \sum_{\ell=1}^{n_\zeta} \zeta_\ell(n) M_{\ell h}^n(i, t) \right].$$

Tomando a combinação convexa de (80) sobre  $\ell$  associado com o tempo  $n$ , e sobre  $h$  associado com o tempo  $n+1$ , resulta na LMI

$$M^n(i) = \begin{bmatrix} S_n^{-1}(i) & * & \dots & * & * & * & * \\ \mathbf{A}_{\zeta(n)}(i) & \hat{S}^n(i; 1) & \dots & * & * & * & * \\ \mathbf{A}_{\zeta(n)}(i) & -R(i) & \dots & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{\zeta(n)}(i) & -R(i) & \dots & \hat{S}^n(i; n_\theta) & * & * & * \\ \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}}(i) & 0 & \dots & 0 & \mathcal{I} & * & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}(i)F_n(i) & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathcal{I} & * \\ -F_n(i) & \hat{Z}(i) & \dots & \hat{Z}(i) & 0 & 0 & Z_{\zeta(n+1)}'(i) + Z_{\zeta(n+1)}(i) \end{bmatrix} > 0, \quad (81)$$

na qual

$$\hat{S}^n(i; j) = \frac{1}{p(i, j)} S_{n+1}(j) - R(i), \quad j = 1, 2, \dots, n_\theta;$$

$$R(i) = \mathbf{B}_{\zeta(n)}'(i) W_{\zeta(n+1)}(i) + W_{\zeta(n+1)}'(i) \mathbf{B}_{\zeta(n)}(i),$$

e

$$\hat{Z}(i) = Z'_{\xi(n+1)}(i)\mathbf{B}'_{\xi(n)}(i) - W_{\xi(n+1)}(i).$$

Multiplicando (81) pela matriz não quadrada <sup>1</sup>

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathcal{I} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathcal{I} \\ 0 & -\mathbf{B}'_{\xi(n)}(i) & \dots & -\mathbf{B}'_{\xi(n)}(i) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pela direita e por sua transposta à esquerda, tem-se

$$\begin{bmatrix} S_n^{-1}(i) & * & \dots & * & * & * \\ \bar{A}_n(i) & p(i,1)^{-1}S_{n+1}(1) & \dots & * & * & * \\ \bar{A}_n(i) & 0 & \dots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{A}_n(i) & 0 & \dots & p(i, n_\theta)^{-1}S_{n+1}(n_\theta) & * & * \\ Q^{\frac{1}{2}}(i) & 0 & \dots & 0 & \mathcal{I} & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}(i)F_n(i) & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} > 0, \quad (82)$$

em que

$$\bar{A}_n(i) = \mathbf{A}_{\xi(n)}(i) + \mathbf{B}_{\xi(n)}(i)F_n(i).$$

Seja  $P_n(i) = S_n^{-1}(i)$ , para todo  $n \geq 0$  e todo  $i \in \Theta$ . Pelo complemento de Schur, a desigualdade matricial (82) é equivalente a

$$P_n(i) > Q(i) + F'_n(i)\mathcal{R}(i)F_n(i) + \bar{A}'_n(i)\mathcal{E}_i(P_{n+1})\bar{A}_n(i). \quad (83)$$

Suponha as LMIs em (75) factíveis. Então, pelo complemento de Schur, (75) é equivalente a:

$$\mathcal{O}_{n+1}(i) > \sum_{k=1}^{n_\theta} p(i, j)\Sigma^{\frac{1}{2}}\mathbf{H}'(i)P_{n+1}(j)\mathbf{H}(i)\Sigma^{\frac{1}{2}}. \quad (84)$$

Aplicando o operador traço em ambos os lados de (84) resulta em:

$$\text{Tr}(\mathcal{O}_{n+1}(i)) > \text{Tr}(\mathbf{H}'(i)\mathcal{E}_i(P_{n+1})\mathbf{H}(i)\Sigma). \quad (85)$$

De (74) e (85) segue que

$$\alpha_n(i) > \mathcal{E}_i(\alpha_{n+1}) + \text{Tr}\{\mathbf{H}'(i)\mathcal{E}_i(P_{n+1})\mathbf{H}(i)\Sigma\}; \quad n = 0, \dots, N-1, \quad \forall i \in \Theta. \quad (86)$$

Finalmente, o complemento de Schur em (76) implica que  $\gamma_0 - \alpha_0(\theta_0) - x'_0 S_0^{-1}(\theta_0)x_0 > 0$ , quando  $S_0^{-1}(\theta_0) = P_0(\theta_0)$ . consequentemente

$$\gamma_0 > x'_0 P_0(\theta_0)x_0 + \alpha_0(\theta_0) > 0. \quad (87)$$

<sup>1</sup> Esta matriz tem o mesmo número de linhas da matriz quadrada  $M^n(i, t)$ , porém, com uma coluna a menos.

Tem-se que  $\gamma_0$  é limitado inferiormente, logo existe

$$\gamma^* = \inf \gamma_0 \text{ tal que } \gamma_0 > x_0' P_0(\theta_0) x_0 + \alpha_0(\theta_0).$$

Note que (83), (86) e (87) satisfazem as desigualdades no Problema 4.2 e, portanto, usando o Lema 4.2 obtém-se que:

$$\min_u J_{N,0}(u) < \gamma^*. \quad (88)$$

**Observação 4.2.** O Teorema 4.1 apresenta uma forma de calcular uma solução subótima para o problema de controle linear quadrático de sistemas lineares com saltos Markovianos e parâmetros variantes no tempo, sem considerar as restrições (58). O Teorema 4.1 representa a primeira tentativa na literatura para resolver este problema de controle, ainda não resolvido. Uma vantagem deste Teorema é que sua utilização faz uso de desigualdades matriciais lineares, uma abordagem completamente independente dos métodos iterativos [79]. A Seção 4.5 ilustra os benefícios potenciais do Teorema 4.1 para aplicações.

#### 4.4 CASO COM RESTRIÇÕES

Nesta seção, as restrições rígidas (58) serão consideradas, as quais, com  $k_0 = 0$ , no intervalo do horizonte de predição podem ser reescritas como:

$$\mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(n)x(n)'] \leq \mathcal{X}_{max}, n = 1, \dots, N-1, \quad (89)$$

$$\mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [u(n)u(n)'] \leq U_{max}, n = 1, \dots, N-1, \quad (90)$$

em que  $\mathbb{E}_{x_n, \mu_n}[\cdot] := \mathbb{E}[\cdot | x(n) = x_n, \theta(n) \sim \mu_{n|n}]$ ,

Seja  $\mathbb{1}_{\mathcal{D}}$  a função indicadora do conjunto  $\mathcal{D}$ . Defina a matriz:

$$\mathcal{X}_n(i) := \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(n)x(n)'] \mathbb{1}_{\{\theta(n)=i\}}, \forall i \in \Theta. \quad (91)$$

**Proposição 4.1.**

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{n+1}(i) = & \sum_{j=1}^{n_\theta} \left\{ p_{ji} \left( (\mathbf{A}_{\bar{\xi}(n)}(j) + \mathbf{B}_{\bar{\xi}(n)}(j)F_n(j)) \mathcal{X}_n(j) (\mathbf{A}_{\bar{\xi}(n)}(j) + \mathbf{B}_{\bar{\xi}(n)}(j)F_n(j))' \right. \right. \\ & \left. \left. + \mu_n(j) \mathbf{H}(j) \Sigma \mathbf{H}(j)' \right) \right\} \end{aligned}$$

em que  $\mathcal{X}_0(i) = \mu(0)x(0)x(0)'$ .

**Demonstração:** Por definição,

$$\mathcal{X}_{n+1}(i) = \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(n+1)x(n+1)'] \mathbb{1}_{\{\theta(n+1)=i\}}, \forall i \in \Theta.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{n+1}(i) &= \sum_{j=1}^{n_\theta} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(n+1)x(n+1)' \mathbf{1}_{\{\theta(n+1)=i|\theta(n)=j\}}] \\
&= \sum_{j=1}^{n_\theta} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [(\mathbf{A}_{\xi(n)}(\theta(n))x(n) + \mathbf{B}_{\xi(n)}(\theta(n))u(n) + \mathbf{H}(\theta(n))w(n)) \\
&\quad \times (\mathbf{A}_{\xi(n)}(\theta(n))x(n) + \mathbf{B}_{\xi(n)}(\theta(n))u(n) \\
&\quad + \mathbf{H}(\theta(n))w(n))' \mathbf{1}_{\{\theta(n+1)=i|\theta(n)=j\}}] \\
&= \sum_{j=1}^{n_\theta} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [(\mathbf{A}_{\xi(n)}(j)x(n) + \mathbf{B}_{\xi(n)}(j)u(n) + \mathbf{H}(j)w(n)) \\
&\quad \times (\mathbf{A}_{\xi(n)}(j)x(n) + \mathbf{B}_{\xi(n)}(j)u(n) + \mathbf{H}(j)w(n))' \mathbf{1}_{\{\theta(n)=j\}}] p_{ji}
\end{aligned}$$

Substituindo  $u(n) = F_n(i)x(n)$ , tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{n+1}(i) &= \sum_{j=1}^{n_\theta} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [(\mathbf{A}_{\xi(n)}(j)x(n) + \mathbf{B}_{\xi(n)}(j)F_n(i)x(n) + \mathbf{H}(j)w(n)) \\
&\quad \times (\mathbf{A}_{\xi(n)}(j)x(n) + \mathbf{B}_{\xi(n)}(j)F_n(i)x(n) + \mathbf{H}(j)w(n))' \mathbf{1}_{\{\theta(n)=j\}}] p_{ji} \\
&= \sum_{j=1}^{n_\theta} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} \left[ [(\mathbf{A}_{\xi(n)}(j) + \mathbf{B}_{\xi(n)}(j)F_n(i))x(n)](x(n))' (\mathbf{A}_{\xi(n)}(j) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{B}_{\xi(n)}(j)F_n(i))' + \mathbf{H}(j)w(n)w(n)' \mathbf{H}(j)'] \mathbf{1}_{\{\theta(n)=j\}} p_{ji} \right] \\
&= \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} (\mathbf{A}_{\xi(n)}(j) + \mathbf{B}_{\xi(n)}(j)F_n(i)) \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(n)x(n)'] \mathbf{1}_{\{\theta(n)=j\}} \\
&\quad \times (\mathbf{A}_{\xi(n)}(j) + \mathbf{B}_{\xi(n)}(j)F_n(i))' \mathbf{1}_{\{\theta(n)=j\}} + \mathbf{H}(j)\Sigma\mathbf{H}(j)'\mu_n(j) \\
&= \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} (\mathbf{A}_{\xi(n)}(j) + \mathbf{B}_{\xi(n)}(j)F_n(i)) \mathcal{X}_n(i) \\
&\quad \times (\mathbf{A}_{\xi(n)}(j) + \mathbf{B}_{\xi(n)}(j)F_n(i))' + \mathbf{H}(j)\Sigma\mathbf{H}(j)'\mu_n(j)
\end{aligned}$$

**Lema 4.3.** A restrição (89) é equivalente a:

$$\sum_{i=1}^{n_\theta} \mathcal{X}_n(i) \leq \mathcal{X}_{max}, \forall n \geq 0 \quad (92)$$

**Demonstração:**

$$\mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(n)x(n)'] = \sum_{i=1}^{n_\theta} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(n)x(n)' \mathbf{1}_{\{\theta(n)=i\}}] = \sum_{i=1}^{n_\theta} \mathcal{X}_n(i).$$

**Corolário 4.1.** Se as condições do Teorema 4.1 forem satisfeitas, e se além disso existirem matizes  $U_n(i)$ ,  $\zeta_n(i)$ , e  $X_{n+1}(i)$ ,  $i \in \Theta$ ,  $n = 1, \dots, N-1$  tais que:

$$\sum_{i=1}^{n_\theta} X_n(i) \leq \mathcal{X}_{max}; X_0(i) = \mu_0 x_0 x_0', \forall n \geq 0, \quad (93)$$

$$X_{n+1}(i) - \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} [\zeta_n(j) + \mu_n(j) \mathbf{H}(j) \Sigma \mathbf{H}(j)'] > 0, \quad (94)$$

$$\begin{bmatrix} \zeta_n(i) & \mathbf{A}_{\zeta(n)}(i)G_n(i) + \mathbf{B}_{\zeta(n)}(i)Y_n(i) \\ * & G_n(i) + G_n(i)' - X_n(i) \end{bmatrix} > 0, \quad (95)$$

$$\sum_{j=1}^{n_\theta} U_n(j) \leq U_{max}, \quad (96)$$

e

$$\begin{bmatrix} U_n(i) & Y_n(i) \\ * & G_n(i) + G_n(i)' - X_n(i) \end{bmatrix} > 0 \quad (97)$$

então as restrições de segundo momento (89) e (90) estarão garantidas.

**Demonstração:** Suponha (95) verdadeira, então

$$G'_n(i)X_n^{-1}(i)G_n(i) \geq G'_n(i) + G_n(i) - X_n(i) > 0.$$

Logo, a desigualdade (95) implica que

$$\begin{bmatrix} \zeta_n(j) & \mathbf{A}_{\zeta(n)}(i)G_n(i) + \mathbf{B}_{\zeta(n)}(i)Y_n(i) \\ * & G'_n(i)X_n^{-1}(i)G_n(i) \end{bmatrix} > 0.$$

Aplicando o complemento de Schur na LMI acima, resulta

$$\begin{aligned} \zeta_n(i) &> [\mathbf{A}_{\zeta(n)}(i)G_n(i) + \mathbf{B}_{\zeta(n)}(i)Y_n(i)]G_n^{-1}(i)X_n(i)G_n'^{-1}(i) \\ &\quad \times [\mathbf{A}_{\zeta(n)}(i)G_n(i) + \mathbf{B}_{\zeta(n)}(i)Y_n(i)]' \end{aligned}$$

substituindo  $Y_n(i) = F_n(i)G_n(i)$ , segue que

$$\zeta_n(i) > [\mathbf{A}_{\zeta(n)}(i) + \mathbf{B}_{\zeta(n)}(i)F_n(i)]X_n(i)[\mathbf{A}_{\zeta(n)}(i) + \mathbf{B}_{\zeta(n)}(i)F_n(i)]', \forall i \in \Theta.$$

Por outro lado, se (94) é factível, então

$$\begin{aligned} X_{n+1}(i) &> \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} [\zeta_n(j) + \mu_n(j)\mathbf{H}(j)\Sigma\mathbf{H}(j)'] \\ &> \sum_{j=1}^{n_\theta} \left\{ p_{ji} (\mathbf{A}_{\zeta(n)}(j) + \mathbf{B}_{\zeta(n)}(i)F_n(j))\mathcal{X}_n(j) (\mathbf{A}_{\zeta(n)}(j) + \mathbf{B}_{\zeta(n)}(i)F_n(j))' \right. \\ &\quad \left. + \mu_n(j)\mathbf{H}(j)\Sigma\mathbf{H}(j)' \right\} \\ &= \mathcal{X}_{n+1}(i). \end{aligned}$$

Portanto, de (93) é possível concluir que

$$\sum_{i=1}^{n_\theta} \mathcal{X}_n(i) \leq X_{max}; \quad \mathcal{X}_0(i) = \mu_0 x_0 x_0', \forall n \geq 0.$$

Pelo exposto acima e de acordo com a Proposição 4.1 a restrição de segundo momento (89) é garantida.

Ademais, supondo (97) factível, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} U_n(j) & Y_n(j) \\ * & G_n(j)'X_n^{-1}(j)G_n(j) \end{bmatrix} > 0. \quad (98)$$

Aplicando o complemento de Schur, segue que:

$$U_n(j) > Y_n(j)G_n(j)^{-1}X_n(j)(G_n^{-1}(j))'Y_n(j)'$$

Logo, somando ambos os lados de  $j = 1$  até  $j = n_\theta$ , tem-se

$$\sum_{j=1}^{n_\theta} U_n(j) > \sum_{j=1}^{n_\theta} Y_n(j)(G_n(j)^{-1})'X_n^{-1}(j)G_n^{-1}(j).$$

Supondo que (96) é factível, é possível concluir que:

$$U_{max} > \sum_{j=1}^{n_\theta} Y_n(j)(G_n(j)^{-1})'X_n^{-1}(j)(G_n^{-1}(j))'(Y_n(j))'$$

substituindo  $F_n(i) = Y_n(i)G_n^{-1}(i)$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} U_{max} &> \sum_{j=1}^{n_\theta} F_n(j)X_n(j)F_n'(j) = \sum_{j=1}^{n_\theta} F_n(j)\mathbb{E}[x(n)x(n)']\mathbf{1}_{\{\theta(n)=j\}}F_n'(j)' \\ &= \sum_{j=1}^{n_\theta} \mathbb{E}[u(n)u(n)']\mathbf{1}_{\{\theta(n)=j\}} \\ &= \mathbb{E}[u(n)u(n)']. \end{aligned}$$

#### 4.5 EXEMPLO

O exemplo a seguir ilustra a efetividade do método proposto neste capítulo. O sistema linear com saltos Markovianos com três modos de operação escolhido e ruído aditivo, é novamente o sistema adaptado de [47] e [15].

Para o modo  $i = 1$ , as matrizes do sistema são:

$$A_1(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.6 & 3.3 \end{bmatrix}, \quad A_2(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.4 & 3.1 \end{bmatrix},$$

$$B_1(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H(1) = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}.$$

Para o modo  $i = 2$ , as matrizes do sistema são:

$$A_1(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4.4 & 4.6 \end{bmatrix}, \quad A_2(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4.2 & 4.6 \end{bmatrix},$$

$$B_1(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H(2) = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}.$$



E finalmente, para o modo  $i = 3$ , as matrizes do sistema são:

$$A_1(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5.4 & -5.3 \end{bmatrix}, A_2(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5.2 & -5.1 \end{bmatrix},$$

$$B_1(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, H(3) = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}.$$

As matrizes de ponderação simétricas para os modos  $i = 1, 2$  e  $3$  são dadas, respectivamente por:

$$Q(1) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}, Q(2) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}, Q(3) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & .011 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{Q}(1) = Q(1), \tilde{Q}(2) = Q(2), \tilde{Q}(3) = Q(3),$$

$$\mathcal{R}(1) = \mathcal{R}(2) = \mathcal{R}(3) = 0.01.$$

A matriz de probabilidades de transição e a matriz de covariância são dadas, respectivamente, por:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.23 & 0.22 \\ 0.36 & 0.35 & 0.29 \\ 0.32 & 0.16 & 0.52 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

#### 4.5.1 Caso sem restrições

Considere o estado inicial  $x_0 = [1 \ 1]'$  e o modo inicial  $\theta_0 = 1$  no Teorema (4.1), para 1000 realizações da cadeia de Markov, o custo médio obtido para foi de 0.300. As médias das trajetórias dos estados do sistema estão mostradas na Figura 9. A média do esforço de controle é mostrada na Figura 10.

#### 4.5.2 Caso com restrições

O estado inicial  $x_0 = [1 \ 1]'$ , o modo inicial é  $\theta_0 = 1$  e as restrições de segundo momento impostas para as entradas de controle e para os estados do sistema foram:

$$\mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[x(n)x(n)'] \leq \begin{bmatrix} 2.002 & 0 \\ 0 & 2.002 \end{bmatrix}, n = 1, \dots, N,$$

$$\mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[u(n)u(n)'] \leq 26.25, n = 1, \dots, N,$$

para 1000 realizações possíveis da cadeia de Markov, neste caso, o custo médio obtido foi de 0.6360.

As trajetórias médias dos estados do sistema estão mostradas na Figura 11, e a média da entrada de controle é mostrada na Figura 12.

Baseando-se nas LMIs (93) e (96), define-se:

$$\Delta(n) = \mathcal{X}_{max} - \sum_{i=1}^{n_\theta} \mathcal{X}_n(i), \forall n \geq 0, \quad (99)$$

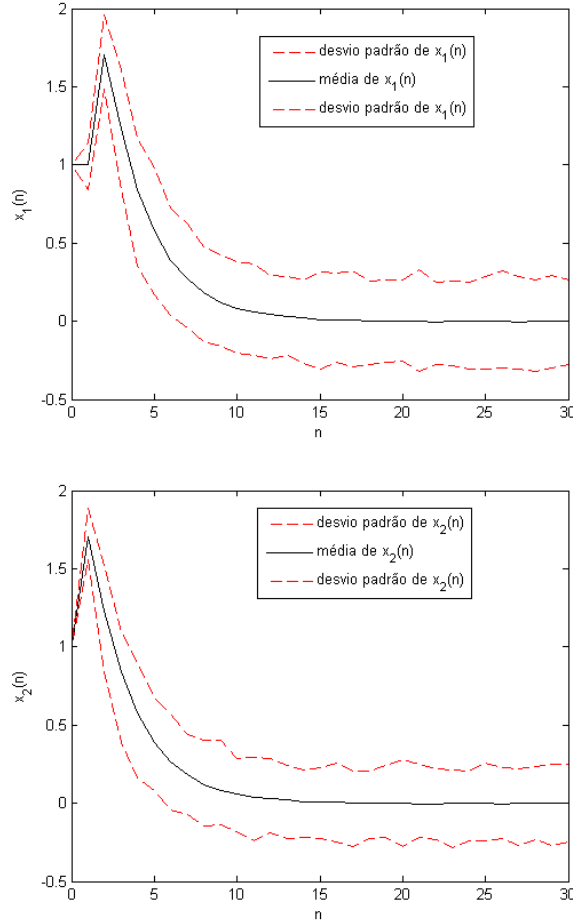


Figura 9: Estados  $x_1(n)$   $x_2(n)$ . A linha contínua indica a resposta média dos estados utilizando o controlador obtido por meio do Teorema 4.1 e as linhas tracejadas indicam o desvio padrão dos valores de cada estado.

$$\delta(n) = U_{max} - \sum_{i=1}^{n_\theta} F_n(i) \mathcal{X}_n(i), \forall n \geq 0. \quad (100)$$

O gráfico dos menores autovalores de  $\Delta(n)$ ,  $\lambda_{\min}\{\Delta(n)\}$ , para cada  $n = 1, \dots, N$  está representado na Figura 13. E o gráfico de  $\delta(n)$  está representado na Figura 14. Note que  $\lambda_{\min}\{\Delta(n)\} = 0$ , em  $n = 1, 2, 4$ , e que  $\delta(n) = 0$  para  $n = 1, 2, 3, 4$ , ou seja, a restrição em valor esperado dos estados e das entradas são ativas nestes casos para  $n = 1, 2, 4$  e  $n = 1, 2, 3, 4$ , respectivamente.

#### 4.6 PRODUÇÃO RELACIONADA

O estudo apresentado no Capítulo 4 deu origem ao artigo:

- R. O. Lopes, E. M. A. M. Mendes, L. A. Tôrres, A. N. Vargas and R. M. Palhares. Finite-horizon Suboptimal Control of Markov Jump Linear Parameter-Varying Systems.

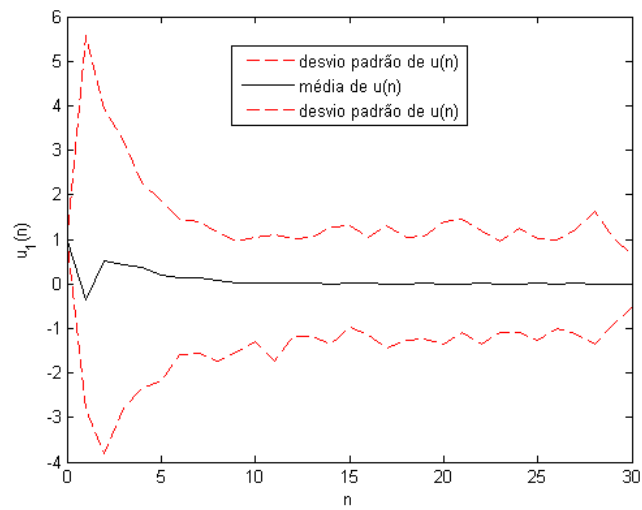


Figura 10: A linha sólida indica a média das entradas de controle obtidas usando o Teorema 4.1, e as linhas tracejadas indicam o desvio padrão das entradas de controle.

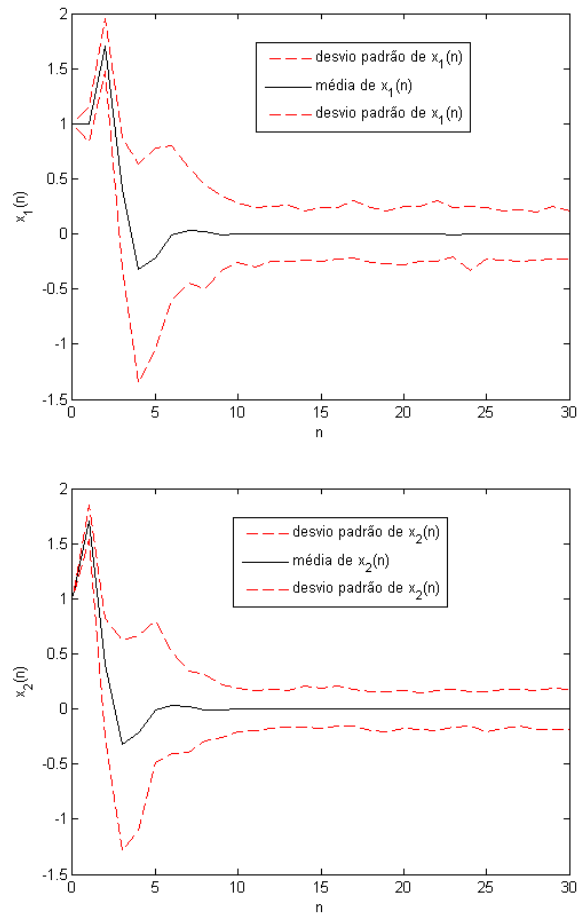


Figura 11: Estados  $x_1(n)$  e  $x_2(n)$ . As linhas contínuas indicam as médias das trajetórias dos estados controlados usando ações obtidas via aplicação do Teorema 4.1, e as linhas tracejadas indicam o desvio padrão de cada estado do sistema.

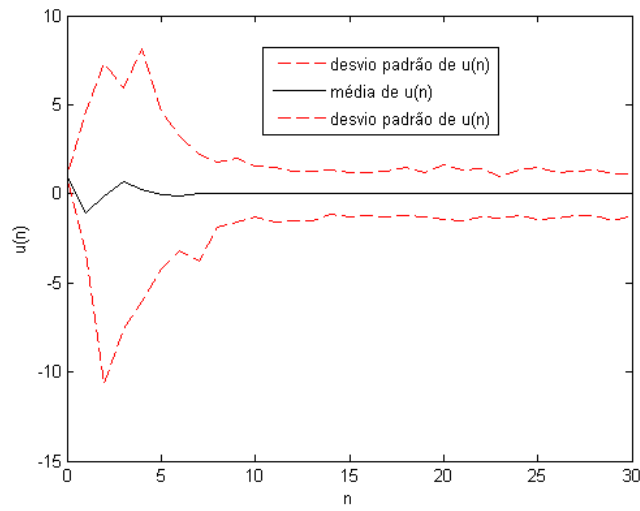


Figura 12: Entrada de controle: a linha sólida indica a média da entrada de controle obtida por meio do Teorema 4.1 e do Corolário 4.1; e as linhas tracejadas indicam o desvio padrão das entradas de controle.

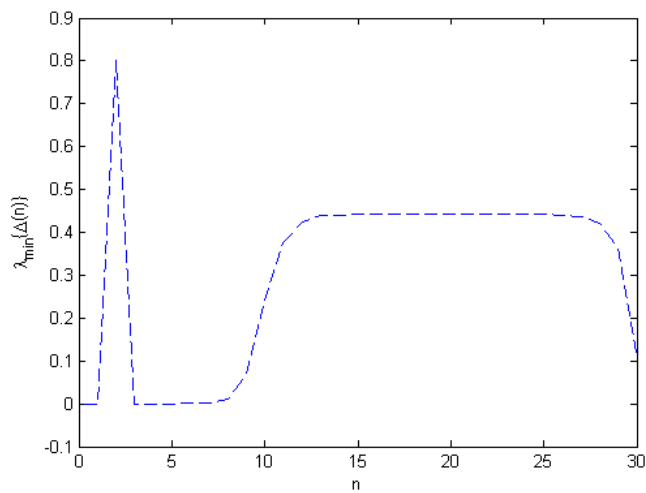
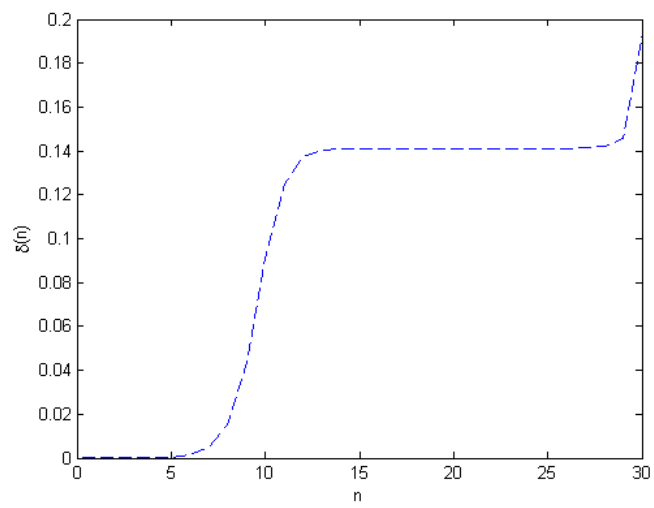


Figura 13: Menores autovalores de  $\Delta(n)$ .

Figura 14: Valores obtidos para  $\delta(n)$ .

### 5.1 CONCLUSÕES

Esta tese apresentou duas estratégias de projetos para controle preditivo baseado em modelo (MPC - do inglês, *Model Predictive Control*) para sistemas lineares a tempo discreto e com saltos Markovianos, como segue:

- No capítulo 3 foi apresentada uma abordagem de controle preditivo robusto baseado em modelo para garantir estabilidade em média quadrática para uma classe de sistemas lineares a tempo discreto com saltos Markovianos e com incertezas politópicas tanto nas matrizes do sistema bem como na matriz de probabilidades de transição. A principal contribuição foi a obtenção de um conjunto de desigualdades matriciais lineares (LMIs) utilizando a teoria de Lyapunov e ações de controle dependentes do modo de Markov e levando em conta as incertezas politópicas na descrição dos modelos do sistema. Restrições rígidas foram consideradas nas entradas de controle e nos estados do sistema. Por fim, o método foi estendido para o caso multi passos de modo similar ao que foi feito em [47]. Exemplos numéricos foram apresentados tais que os resultados obtidos foram comparados com outros resultados disponíveis em [47] servindo para ilustrar a eficácia e o desempenho da nova estratégia de controle em termos de custo, estabilidade e factibilidade em relação a literatura recente no tema.
- O capítulo 4 apresentou uma estratégia de controlador MPC robusto de horizonte finito para uma classe de sistemas lineares a tempo discreto com saltos Markovianos e ruído aditivo. Como contribuição, obteve-se novas condições descritas por LMIs e ações de controle dependentes do modo de Markov, levando em conta incertezas no sistema descritas da forma politópica. Além disso, foram consideradas restrições sobre a entrada de controle e os estados do sistema em termos do segundo momento. Para ilustrar a efetividade dos resultados obtidos, foram realizadas simulações numéricas.

Os resultados desta tese foram desenvolvidos para sistemas lineares com saltos Markovianos, supondo que os modos de Markov estão disponíveis para o controlador e ignorando a ocorrência de possíveis atrasos no tempo. Quanto às restrições, restrições probabilísticas não foram levadas em consideração. No caso de horizonte infinito foram consideradas apenas restrições rígidas nas entradas e estados e no caso de horizonte finito foram consideradas restrições em termos de valor esperado do segundo momento das entradas e estados.

Futuras contribuições ao tema podem incluir: restrições probabilísticas; possíveis atrasos no tempo; estados de Markov não observáveis; extensão do MPC para sistemas não lineares.

## 5.2 PROPOSTA DE CONTINUIDADE

Como continuidade de estudos no tema MPC para sistemas com saltos Markovianos sugere-se os seguintes pontos:

### 5.2.1 Restrições probabilísticas

Em alguns sistemas estocásticos, as restrições rígidas podem não ser garantidas em todas as realizações possíveis. Neste caso, como uma alternativa, pode ser razoável considerar restrições probabilísticas na formulação do problema de controle, de forma que não se imponha que as restrições sejam satisfeitas em todas as realizações, mas, somente com uma probabilidade pré definida [12], [36], [59]. Restrições probabilísticas são especialmente importantes em engenharia e finanças, nas quais são comuns incertezas quanto a preço, demanda, oferta, taxa de câmbio, taxa de reciclagem e alimentação e condições demográficas. Algumas aplicações clássicas de restrições probabilísticas incluem gerenciamento de reservatórios de água e gerenciamento de riscos financeiros. Mais recentemente, estas restrições foram utilizadas na navegação autônoma de veículos não tripulados, bem como na geração de energia renovável [41]. O grande desafio para resolver problemas de otimização com restrição de probabilidade está no cálculo da probabilidade de dinâmica estocástica sob restrições de desigualdade.

O problema não linear com restrições de probabilidade é particularmente difícil de resolver, pois a propagação não linear dificulta a obtenção da distribuição das variáveis de saída mesmo quando as distribuições do ruído aditivo são conhecidas.

Alguns trabalhos têm usado a técnica de abordagem aleatória (em inglês, *Randomized approach*) para tratar as restrições probabilísticas. Basicamente, a abordagem aleatória substitui as restrições de probabilidades por um número finito de restrições determinísticas resultantes de amostras da perturbação estocástica [73], [9].

Propõe-se, como uma continuidade, estudar MPC para sistemas com saltos Markovianos considerando restrições probabilísticas nas entradas, estados e saídas.

### 5.2.2 Atraso no tempo

Em muitos processos reais, como processos químicos, sistemas biológicos, sistemas de transporte, redes de comunicação digital, sistemas mecânicos, etc., [37], a ocorrência de atraso (ou retardo) no tempo é intrínseco. Sendo assim, o estudo de sistemas com atraso no tempo é uma questão oportuna. Os atrasos no tempo podem ser constantes ou variantes no tempo, conhecidos (mensuráveis) ou desconhecidos/incertos, determinísticos ou estocásticos, dependendo da natureza do problema. Em sistemas de controle em rede, por exemplo, é natural a existência de atraso no tempo (muitas vezes variante no tempo e incerto) durante a transmissão de informação/dados. Estes atrasos podem levar



à instabilidade e baixo desempenho do sistema de controle [62], [72], [77], [76] [35], [8].

Motivados pelo exposto acima, pretende-se estudar MPC para sistemas com saltos Markovianos, considerando a presença de atraso no tempo de forma a obter um controlador que garanta estabilidade e desempenho requeridos.

### 5.2.3 *Estados de Markov não observáveis*

De acordo com [80], em aplicações de sistemas com saltos Markovianos em geral, os estados de Markov não estão disponíveis para o controlador. Casos em que o estado da cadeia de Markov não é observável são tratados em [78], [80], [81]. Considerar a possibilidade de estender o projeto de controle para o caso em que os estados da cadeia de Markov não são observáveis, obtendo sequências de ganhos que independentes da cadeia de Markov, é um problema com bom grau de dificuldade e que merece ser considerado.

### 5.2.4 *Extensão para sistemas não lineares*

Propõe-se estudar (NMPC - do inglês, *Nonlinear model predictive control*) em que o projeto MPC para sistemas não lineares com saltos Markovianos precisaria ser melhor compreendido no contexto do ferramental apresentado. Não parece ser uma tarefa trivial a menos que se considere adotar uma representação do sistema por modelos fuzzy Takagi-Sugeno, mesmo assim demanda atenção adicional uma vez que o contexto de saltos Markovianos e MPC devem ser levados em conta. Alguns resultados recentes sobre controle baseado em modelos fuzzy Takagi-Sugeno sugerem que pode-se ter chances de sucesso neste tópico [17], [18], [58].



## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] MOSEK ApS. *The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 8.1*. 2017. URL: <http://docs.mosek.com/8.1/toolbox/index.html>.
- [2] N. S. D. Arrifano e V. A. Oliveira. “Robust  $H_\infty$  Fuzzy Control Approach for a Class of Markovian Jump Nonlinear Systems”. Em: *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 14.6 (2006), pp. 738–754.
- [3] D. Bernardini e A. Bemporad. “Stabilizing model predictive control of stochastic constrained linear systems”. Em: *IEEE Transactions on Automatic Control* 57.6 (2012), pp. 1468–1480.
- [4] D. P. Bertsekas. *Dynamic Programming and Optimal Control, Vol. 2*. Athena Scientific, 1995.
- [5] Dimitri P Bertsekas. “Dynamic programming and stochastic control”. Em: *Mathematics in science and engineering* 125 (1976).
- [6] W. Jr. Blair e D. Sworder. “Feedback control of a class of linear discrete systems with jump parameters and quadratic cost criteria”. Em: *International Journal of Control* 21.5 (1975), pp. 833–841.
- [7] S. Boyd, E. G. Laurent e E. Feron V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Vol. 15. Siam, 1994.
- [8] H. Cai, P. Li, C. Su e J. Cao. “Robust Model Predictive Control for a Class of Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems With Operation Mode Disordering”. Em: *IEEE Access* 7 (2019), pp. 10415–10427.
- [9] G. Calafiore e M. C. Campi. “Uncertain convex programs: randomized solutions and confidence levels”. Em: *Mathematical Programming* 102.1 (2005), pp. 25–46.
- [10] E. F. Camacho e C. Bordons. “Model predictive control. Advanced textbooks in control and signal processing”. Em: *Springer-Verlag, London* (2004).
- [11] P. J. Campo e M. Morari. “Robust model predictive control”. Em: *American Control Conference, 1987*. IEEE. 1987, pp. 1021–1026.
- [12] C. F. Caruntu, C. Lazar e A. N Vargas. “Chance-constrained model predictive control for vehicle drivetrains in a cyber-physical framework”. Em: *2017 International Conference on Engineering, Technology and Innovation (ICE/ITMC)*. IEEE. 2017, pp. 1137–1144.
- [13] J. R. Colombo Junior, R. K. H. Galvão e E. Assunção. “A new OFRMPC formulation with on-line synthesis of the dynamic output feedback controller”. Em: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 27.17 (2017), pp. 3921–3936.

- [14] J. R. Colombo Junior, R. J. M. Afonso, R. K. H. Galvão e E. Assunção. “Robust model predictive control of a benchmark electromechanical system”. Em: *Journal of Control, Automation and Electrical Systems* 27.2 (2016), pp. 119–131.
- [15] O. L. V. Costa, E. K. Boukas e R. P. Marques. “Constrained quadratic control of discrete-time Markovian jump linear systems”. Em: *Automatica* 35.4 (1999), pp. 617–626.
- [16] O. L. V. Costa, M. D. Fragoso e R. P. Marques. *Discrete-time Markov jump linear systems*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [17] P. H. S. Coutinho, J. Lauber, M. Bernal e R. M. Palhares. “Efficient LMI Conditions for Enhanced Stabilization of Discrete-Time Takagi-Sugeno Models via Delayed Nonquadratic Lyapunov Functions”. Em: *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 27 (2019), pp. 1833–1843.
- [18] P. H. S. Coutinho, R. F. Araújo, A.-T. Nguyen e R. M. Palhares. “A Multiple-Parameterization Approach for local stabilization of constrained Takagi-Sugeno fuzzy systems with nonlinear consequents”. Em: *Information Sciences* 506 (2020), pp. 295–307.
- [19] F. A. Cuzzola, Geromel J. C e M. Morari. “An improved approach for constrained robust model predictive control”. Em: *Automatica* 38.7 (2002), pp. 1183–1189.
- [20] J. Daafouz e J. Bernussou. “Parameter dependent Lyapunov functions for discrete-time systems with time-varying parametric uncertainties”. Em: *Systems & Control Letters* 43.5 (2001), pp. 355–359.
- [21] Y. Ding, L. Wang, Y. Li e D. Li. “Model predictive control and its application in agriculture: A review”. Em: *Computers and Electronics in Agriculture* 151 (2018), pp. 104–117.
- [22] V. Dombrovskii e T.a Obyedko. “Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization”. Em: *Automatica* 54 (2015), pp. 325–331.
- [23] M. Farina, L. Giulioni e R. Scattolini. “Stochastic linear model predictive control with chance constraints—A review”. Em: *Journal of Process Control* 44 (2016), pp. 53–67.
- [24] A. C. C. Fontes, S. V. Raković e I. V. Kolmanovsky. “Rigid Tube Model Predictive Control for Linear Sampled-data Systems”. Em: *IFAC-PapersOnLine* 50.1 (2017), pp. 9840–9845.
- [25] M. G. Forbes, R. S. Patwardhan, H. Hamadah e R. B. Gopaluni. “Model predictive control in industry: Challenges and opportunities”. Em: *IFAC-PapersOnLine* 48.8 (2015), pp. 531–538.
- [26] G. Franzè, F. Tedesco e D. Famularo. “Model predictive control for constrained networked systems subject to data losses”. Em: *Automatica* 54 (2015), pp. 272–278.
- [27] P. Gahinet, P. Apkarian e M. Chilali. “Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty”. Em: *IEEE Transactions on Automatic control* 41.3 (1996), pp. 436–442.

- [28] C. E. Garcia, D. M. Prett e M. Morari. “Model predictive control: Theory and practice— A survey”. Em: *Automatica* 25.3 (1989), pp. 335–348.
- [29] R. S. Gesser, D. M. Lima e J. E. N. Rico. “Robust Model Predictive Control: Implementation Issues with Comparative Analysis”. Em: *9th IFAC Symposium on Robust Control Design* (2018).
- [30] L. Grüne e J. Pannek. “Nonlinear model predictive control”. Em: *Nonlinear Model Predictive Control*. Springer, 2017, pp. 45–69.
- [31] F. Herzog, S. Keel, G. Dondi, L. M. Schumann e H. P. Geering. “Model predictive control for portfolio selection”. Em: *2006 American Control Conference*. IEEE. 2006, 8–pp.
- [32] D. H. van Hessem e O. H. Bosgra. “Closed-loop stochastic model predictive control in a receding horizon implementation on a continuous polymerization reactor example”. Em: *Proceedings of the 2004 American Control Conference*. Vol. 1. IEEE. 2004, pp. 914–919.
- [33] D. Kannan, V. Lakshmikantham e K. Kannan. *Handbook of Stochastic Analysis and Applications*. Marcel Dekker, 2001.
- [34] S. H. Kim. “H<sub>2</sub> control of Markovian jump LPV systems with measurement noises: Application to a DC-motor device with voltage fluctuations”. Em: *Journal of the Franklin Institute* 354.4 (2017), pp. 1784–1800.
- [35] M. V. Kothare, V. B. Venkataramanan e M. Morari. “Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities”. Em: *Automatica* 32.10 (1996), pp. 1361–1379.
- [36] B. Kouvaritakis e M. Cannon. *Model predictive control*. Springer, 2016.
- [37] W. H. Kwon e P. Park. “Stabilizing and Optimizing Control for Time-Delay Systems”. Em: (2018).
- [38] J. H. Lee. “Model predictive control: Review of the three decades of development”. Em: *International Journal of Control, Automation and Systems* 9.3 (2011), p. 415.
- [39] D. Li e Y. Xi. “Design of robust model predictive control based on multi-step control set”. Em: *Acta Automatica Sinica* 35.4 (2009), pp. 433–437.
- [40] D. Li, Y. Xi e P. Zheng. “Constrained robust feedback model predictive control for uncertain systems with polytopic description”. Em: *International Journal of control* 82.7 (2009), pp. 1267–1274.
- [41] P. Li, H. Arellano-Garcia e G. Wozny. “Chance constrained programming approach to process optimization under uncertainty”. Em: *Computers & chemical engineering* 32.1-2 (2008), pp. 25–45.
- [42] X. Liu, A. N. Vargas, X. Yu e L. Xu. “Stabilizing two-dimensional stochastic systems through sliding mode control”. Em: *Journal of the Franklin Institute* 354.14 (2017), pp. 5813–5824.
- [43] J. Löfberg. “YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB”. Em: *In Proceedings of the CACSD Conference*. Taipei, Taiwan, 2004.

- [44] R. O. Lopes, E. M. A. M. Mendes, L. A. B. Torres e R. M. Palhares. “Constrained robust model predicted control of discrete-time Markov jump linear systems”. Em: *IET Control Theory & Applications* 13 (2019), pp. 517–525.
- [45] M. Lorenzen, M. Cannon e F. Allgöwer. “Robust MPC with recursive model update”. Em: *Automatica* 103 (2019), pp. 461–471.
- [46] C. Lozoya, C. Mendoza, L. Mejía, J. Quintana, G. Mendoza, M. Bustillos, O. Arras e L. Solís. “Model predictive control for closed-loop irrigation”. Em: *IFAC Proceedings Volumes* 47.3 (2014), pp. 4429–4434.
- [47] J. Lu, D. Li e Y. Xi. “Constrained model predictive control synthesis for uncertain discrete-time Markovian jump linear systems”. Em: *IET Control Theory & Applications* 7.5 (2013), pp. 707–719.
- [48] J. Lu, Y. Xi, D. Li, Y. Xu e Z. Gan. “Model predictive control synthesis for constrained Markovian jump linear systems with bounded disturbance”. Em: *IET Control Theory & Applications* 11.18 (2017), pp. 3288–3296.
- [49] J. M. Maciejowski. *Predictive control: with constraints*. Pearson education, 2002.
- [50] W. J. Mao. “Robust stabilization of uncertain time-varying discrete systems and comments on “An improved approach for constrained robust model predictive control””. Em: *Automatica* 39.6 (2003), pp. 1109–1112.
- [51] M. Mariton. *Jump Linear Systems in Automatic Control*. New York: Marcel Dekker, 1990.
- [52] J. Mattingley, Y. Wang e S. Boyd. “Receding Horizon Control”. Em: *IEEE Control Syst. Mag.* 31.3 (2011), pp. 52–65.
- [53] D. Q. Mayne. “Model predictive control: Recent developments and future promise”. Em: *Automatica* 50.12 (2014), pp. 2967–2986.
- [54] D. Q. Mayne. “Robust and stochastic model predictive control: Are we going in the right direction?” Em: *Annual Reviews in Control* 41 (2016), pp. 184–192.
- [55] D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao e P. O. Scokaert. “Constrained model predictive control: Stability and optimality”. Em: *Automatica* 36.6 (2000), pp. 789–814.
- [56] A. Mesbah. “Stochastic model predictive control: An overview and perspectives for future research”. Em: *IEEE Control Systems* 36.6 (2016), pp. 30–44.
- [57] R. R. Negenborn, P.-J. van Overloop, T. Keviczky, B. De Schutter et al. “Distributed model predictive control of irrigation canals.” Em: *NHM* 4.2 (2009), pp. 359–380.
- [58] A.-T. Nguyen, T. Taniguchi, L. Eciolaza, V. C. S. Campos, R. M. Palhares e M. Sugeno. “Fuzzy Control Systems: Past, Present and Future”. Em: *IEEE Computational Intelligence Magazine* 14 (2019), pp. 56–68.

- [59] F. Oldewurtel, A. Parisio, C. N. Jones, M. Morari, D. Gyalistras, M. Gwerder, V. Stauch, B. Lehmann e K. Wirth. “Energy efficient building climate control using stochastic model predictive control and weather predictions”. Em: *Proceedings of the 2010 American control conference*. IEEE. 2010, pp. 5100–5105.
- [60] F. Oldewurtel, A. Parisio, C. N. Jones, D. Gyalistras, M. Gwerder, V. Stauch, B. Lehmann e M. Morari. “Use of model predictive control and weather forecasts for energy efficient building climate control”. Em: *Energy and Buildings* 45 (2012), pp. 15–27.
- [61] M. C. de Oliveira, J. Bernussou e J. C. Geromel. “A new discrete-time robust stability condition”. Em: *Systems & Control Letters* 37.4 (1999), pp. 261–265.
- [62] T. G. de Oliveira, R. M. Palhares, V. C. S. Campos, P. S. Queiroz e E. N. Goncalves. “Improved Takagi-Sugeno fuzzy output tracking control for nonlinear networked control systems”. Em: *Journal of the Franklin Institute* 354 (2017), pp. 7280–7305.
- [63] P. Panagiotis, P. Sopasakis, H. Sarimveis e A. Bemporad. “Stochastic model predictive control for constrained discrete-time Markovian switching systems”. Em: *Automatica* 50.10 (2014), pp. 2504–2514.
- [64] Byung-Gun Park e Wook Hyun Kwon. “Robust one-step receding horizon control of discrete-time Markovian jump uncertain systems”. Em: *Automatica* 38.7 (2002), pp. 1229–1235.
- [65] P. Patrinos, S. Trimboli e A. Bemporad. “Stochastic MPC for real-time market-based optimal power dispatch”. Em: *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*. IEEE. 2011, pp. 7111–7116.
- [66] D. L. M. Peña, E. Alamo, A. Bemporad e E. F. Camacho. “A decomposition algorithm for feedback min–max model predictive control”. Em: *IEEE Transactions on Automatic Control* 51.10 (2006), pp. 1688–1692.
- [67] J. A. Primbs e C. H. Sung. “Stochastic receding horizon control of constrained linear systems with state and control multiplicative noise”. Em: *IEEE Transactions on Automatic Control* 54.2 (2009), pp. 221–230.
- [68] S. J. Qin e T. A. Badgwell. “A survey of industrial model predictive control technology”. Em: *Control Engineering Practice* 11.7 (2003), pp. 733–764.
- [69] D. R. Ramirez e E. F. Camacho. “On the piecewise linear nature of min-max model predictive control with bounded uncertainties”. Em: *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, 2001*. Vol. 5. IEEE. 2001, pp. 4845–4850.
- [70] J. B. Rawlings e D. Q. Mayne. *Model predictive control: Theory and design*. Nob Hill Pub., 2009.
- [71] A. Sala, M. Hernández-Mejías e C. Ariño. “Stable receding-horizon scenario predictive control for Markov-jump linear systems”. Em: *Automatica* 86 (2017), pp. 121–128.

- [72] H. J. Savino, C. R. P. dos Santos, F. O. Souza, L. C. A. Pimenta, M. de Oliveira e R. M. Palhares. “Conditions for consensus of multi-agent systems with time-delays and uncertain switching topology”. Em: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 63.2 (2016), pp. 1258–1267.
- [73] G. Schildbach, G. C. Calafiore, L. Fagiano e M. Morari. “Randomized model predictive control for stochastic linear systems”. Em: *2012 American Control Conference (ACC)*. IEEE. 2012, pp. 417–422.
- [74] P. Shi e F. Li. “A survey on Markovian jump systems: Modeling and design”. Em: *International Journal of Control, Automation and Systems* 13.1 (2015), pp. 1–16.
- [75] E. M. de Souza, R. M. Palhares e L. A. B. Torres. “Uma abordagem via controle preditivo robusto para sistemas não-lineares incertos linearizados por realimentação de estados”. Em: *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2015)*. Natal, RN, 2015.
- [76] F. O. Souza, R. M. Palhares e L. A. B. Torres. “LMI design method for networked-based PID control”. Em: *International Journal of Systems Science* 42 (2011), pp. 1821–1830.
- [77] F. O. Souza, L. A. Mozelli, M. C. de Oliveira e R. M. Palhares. “LMI design method for networked-based PID control”. Em: *International Journal of Control* 89 (2016), pp. 1962–1971.
- [78] J. B. R. do Val e T. Başar. “Receding horizon control of jump linear systems and a macroeconomic policy problem”. Em: *Journal of Economic Dynamics and Control* 23.8 (1999), pp. 1099–1131.
- [79] A. N. Vargas, E. F. Costa e J. B. R. do Val. “On the control of Markov jump linear systems with no mode observation: application to a DC Motor device”. Em: *Int. J. Robust Nonlinear Control* 23.10 (2013), pp. 1136–115.
- [80] A. N. Vargas, W. Furloni e J. B. do Val. “Constrained model predictive control of jump linear systems with noise and non-observed Markov state”. Em: *American Control Conference, 2006*. IEEE. 2006, 6–pp.
- [81] A. N. Vargas, J. B. do Val e E. F. Costa. “Receding horizon control of Markov jump linear systems subject to noise and unobserved state chain”. Em: *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control, 2004*. Vol. 4. IEEE. 2004, pp. 4381–4386.
- [82] S. Vazquez, J. I. Leon, L. G. Franquelo, J. Rodriguez, H. A. Young, A. Marquez e P. Zanchetta. “Model predictive control: A review of its applications in power electronics”. Em: *IEEE Industrial Electronics Magazine* 8.1 (2014), pp. 16–31.
- [83] J. Wang, Y. Song, S. Zhang, S. Liu e D. M. Abdullah. “Robust Model Predictive Control for Linear Discrete-Time System With Saturated Inputs and Randomly Occurring Uncertainties”. Em: *Asian Journal of Control* 20.1 (2018), pp. 425–436.
- [84] D. Williams. *Probability with martingales*. Cambridge University Press, 1991.



- [85] D. Li Y. Zhou, Y. Xi J. Lu e L. Cen. “Networked and distributed predictive control of non-linear systems subject to asynchronous communication”. Em: *IET Control Theory & Applications* (2017).
- [86] J. Yan e R. R. Bitmead. “Incorporating state estimation into model predictive control and its application to network traffic control”. Em: *Automatica* 41.4 (2005), pp. 595–604.
- [87] Z. Yueyuan, Y. Yanyan e L. Fei. “Constrained model predictive control for Markov jump system with disturbances”. Em: *Proceedings of the 34th Chinese Control Conference, 2015*. IEEE. 2015, pp. 1816–1821.
- [88] Y. Zhu, Z. Zhong, W. X. Zheng e D. Zhou. “HMM-based  $H_\infty$  filtering for discrete-time Markov jump LPV systems over unreliable communication channels”. Em: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems* 99 (2017), pp. 1–12.