

Laboratório de Modelagem, Análise e Controle de Sistemas Não-Lineares

Departamento de Engenharia Eletrônica

Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901 Belo Horizonte, MG Brasil

Fone: +55 3499-4866 - Fax: +55 3499-4850



Identificação de Sistemas Utilizando Métodos de Subespaços

Rodrigo Augusto Ricco

Dissertação submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientadores: Prof. Luis Antonio Aguirre, Ph.D.
Prof. Bruno Otávio Soares Teixeira, Dr.

Belo Horizonte, fevereiro de 2012

Dedicatória

A minha querida esposa Anny, que com sua dedicação e seu amor incondicional me faz sorrir, mesmo nas horas mais difíceis.

Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida e por me dar a oportunidade de crescer intelectualmente e espiritualmente com as experiências cotidianas.

A minha amada esposa Anny, por sua doçura e carinho!

Ao meu querido Tio Jorge a quem me espelho por seu amor ao próximo e capacidade de superar desafios.

A minha família por tudo que me proporcionou e que me fez ser forte para suportar as dores da vida e me mostrou como saborear as merecidas vitórias com serenidade e humildade.

Aos meus primeiros orientadores, Gleison, Liliam, Erivelton e Márcio, obrigado pelas oportunidades, pelo constante suporte e pela amizade.

Aos meus atuais orientadores, Bruno e Luis, que, com grande paciência e tranquilidade, me incentivaram e me motivaram nesta difícil empreitada. Muito obrigado pelos ensinamentos e por serem tão amigos.

Aos meus amigos da UFSJ e do GCoM, obrigado pelo aprendizado constante que tive e ainda tenho com vocês!

Aos amigos de pós-graduação e do MACSIN, pelas dúvidas compartilhadas, pelos conselhos, pelos ensinamentos e por tornarem esse período mais humano.

A todos aqueles que acreditaram em mim e me deram força para buscar meus sonhos, que pareciam inalcançáveis, mas que aos poucos se realizam.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, pelo suporte financeiro.

Epígrafe

“Ele vos deu vida, estando vós mortos nos vossos delitos e pecados. Nos quais andastes outrora, segundo o curso deste mundo, segundo o príncipe da potestade do ar, do espírito que agora atua nos filhos da desobediência.

Entre os quais também todos nós andamos outrora, segundo as inclinações da nossa carne, fazendo a vontade da carne e dos pensamentos; e éramos, por natureza, filhos da ira, como também os demais.

Mas Deus, sendo rico em misericórdia, por causa do grande amor com que nos amou,

E estando nós mortos em nossos delitos, nos deu vida juntamente com Cristo - pela graça sois salvos,

E, juntamente com ele, nos ressuscitou, e nos fez assentar nos lugares celestiais em Cristo Jesus;

Para mostrar, nos séculos vindouros, a suprema riqueza da sua graça, em bondade para conosco, em Cristo Jesus.

Porque pela graça sois salvos, mediante a fé; e isto não vem de vós, é dom de Deus.

Não vem das obras, para que ninguém se glorie;

Pois somos feitura dele, criados em Cristo Jesus para boas obras, as quais Deus de antemão preparou para que andássemos nelas.”

Ef 2:1-10

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	xiii
Abstract	xv
Lista de Figuras	xviii
Lista de Tabelas	xix
Lista de Símbolos	xxi
Lista de Acrônimos	xxv
1 Introdução	1
1.1 Motivação e Justificativa	1
1.2 Breve Histórico	3
1.3 Objetivos	4
1.4 Estrutura da Dissertação	4
2 Prolegômenos	7
2.1 Introdução	7
2.2 Formulação do Problema	7
2.3 Ideias Básicas	8
2.4 Notações	10
2.4.1 Matrizes em Blocos de Hankel	10

2.4.2	Sequências de Estados	13
2.4.3	Matrizes do Modelo	13
2.5	Ferramentas Geométricas	14
2.5.1	Projeções Ortogonais	14
2.5.2	Projeções Oblíquas	18
2.6	Ferramentas Estatísticas	21
2.7	Índices de Qualidade	23
2.8	Considerações Finais	24
3	Identificação Determinística	25
3.1	Introdução	25
3.2	Equações Matriciais de Dados de Entrada-Saída	25
3.3	Estimando os Subespaços	26
3.4	Particionando O_i Determinística	26
3.5	Identificação para Sistemas Autônomos	27
3.6	Uso de Sequências Específicas	28
3.7	Determinação das Matrizes do Sistema	33
3.7.1	Usando a Matriz de Observabilidade coluna(Γ_i)	33
3.7.2	Usando os Estados linha(X_f)	36
3.8	A Escolha das Matrizes de Ponderação	37
3.9	Considerações Finais	39
4	Identificação Estocástica	41
4.1	Introdução	41
4.2	Equações Matriciais de Dados de Entrada-Saída	41
4.3	Particionando O_i Estocástica	42
4.4	Estimação de O_i por meio dos Dados de Entrada-Saída	42
4.5	Determinação das Matrizes do Sistema	46
4.5.1	Usando a Matriz de Observabilidade coluna(Γ_i)	47
4.5.2	Usando os Estados linha(X_f)	48
4.6	O Uso de Variáveis Instrumentais	49

4.6.1	Ruído de Medição Colorido (MOESP-PI)	50
4.6.2	Ruído de Medição e Processo Colorido (MOESP-PO)	51
4.7	Considerações Finais	57
5	Resultados	59
5.1	Introdução	59
5.2	Motor de Corrente Contínua (CC)	59
5.2.1	Testes para Identificação	61
5.2.2	Identificação do Sistema	61
5.2.3	Validação dos Modelos	62
5.3	Planta de Bombeamento de Água	64
5.3.1	Testes para a Identificação	64
5.3.2	Identificação do Sistema	65
5.3.3	Validação dos Modelos	67
5.4	Planta Piloto de Flotação em Coluna	71
5.4.1	Testes para a Identificação	73
5.4.2	Identificação do Sistema	75
5.4.3	Validação dos Modelos	78
5.5	Conclusões	79
6	Conclusões	81
6.1	Introdução	81
6.2	Considerações Gerais	81
6.3	Contribuições	82
6.4	Trabalhos Futuros	82
	Bibliografia	88
A	Fundamentos de Sistemas Lineares e Álgebra Linear	89
A.1	Algumas Definições	89
A.2	Lemas	90
A.3	Decomposições de Matrizes	90

A.3.1	Decomposição em Valores Singulares	90
A.3.2	Decomposição QR	91
A.4	Sistemas Lineares	91
A.4.1	Controlabilidade e Observabilidade	92
B	Demonstrações	95
B.1	Demonstração - Equações Matriciais Entrada-Saída	95
B.2	Demonstração - Teorema 3.6.1	99
C	Rotinas Computacionais	103
C.1	moesp	103
C.2	moesp_pi	104
C.3	moesp_po	106

Resumo

Nas duas últimas décadas, os métodos de identificação por subespaços vêm ganhando um papel relevante no cenário internacional, tendo em vista o potencial de sua aplicação no meio industrial, especificamente em plantas multivariáveis. Os algoritmos de identificação por subespaços são simples de implementar tanto quanto o algoritmo de mínimos quadrados. Entretanto, a teoria por trás desses métodos necessita de conceitos da teoria de sistemas lineares, processos estocásticos, identificação de sistemas, álgebra linear, entre outros, o que dificulta sua compreensão e difusão. Este trabalho investiga o uso de técnicas de identificação por subespaços aplicadas a sistemas a tempo discreto, lineares, invariantes no tempo e multivariáveis. Os esforços foram direcionados aos seguintes objetivos: (I) interpretar geometricamente a metodologia, (II) levantar, por meio de simulações, situações nas quais os algoritmos são indicados ou não, (III) comparar com outras metodologias clássicas e (IV) aplicá-los a sistemas simulados e experimentais. Inicialmente, apresentam-se conceitos relativos à modelagem em espaço de estados, matrizes e vetores em blocos, ferramentas geométricas e estatísticas. Esses conceitos são essenciais para compreensão da teoria de identificação por subespaços. Posteriormente, no caso determinístico de identificação por subespaços, faz-se um estudo completo de como as matrizes de estados podem ser extraídas por meio dos dados de entrada e saída de um sistema multivariável. Neste contexto, são estudados os algoritmos N4SID e MOESP. Logo após, o caso estocástico é tratado de forma semelhante ao caso determinístico. Mostra-se que os métodos N4SID e MOESP são robustos a ruído de medição branco. Contudo, quando sujeitos a ruído de medição e/ou de processo colorido, esses estimadores são polarizados. Uma alternativa não polarizada é o método de variáveis instrumentais. Sendo assim, são apresentados os estimadores MOESP-PI e MOESP-PO. A fim de facilitar a compreensão das diferentes características dos métodos de subespaços, demonstrações e exemplos simulados são apresentados. Por fim, os métodos N4SID, MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO são aplicados a três sistemas multivariáveis: um modelo simulado de um motor CC, uma planta de bombeamento de água e uma planta de flotação em coluna. Os resultados apresentados sugerem que os métodos de subespaços são uma alternativa viável para sistemas lineares de múltiplas entradas e múltiplas saídas.

Palavras-chave: Identificação de sistemas; Métodos de subespaços; Modelos em espaço de estados; Sistemas multivariáveis; Sistemas Lineares.

Abstract

Over the last two decades, subspace identification methods have attracted great attention due their potential for application in industry, especially for multivariable systems. The algorithms of subspace identification are as easy to implement as well-known algorithms such as least squares. However, the theory behind these methods requires concepts from linear systems, stochastic processes, system identification, linear algebra, and others, making their understanding more difficult. As a consequence such methods are less well-known than others. This work investigates the use of subspace identification techniques applied to discrete-time, linear, time-invariant and multivariable systems. Our efforts have focused on the following objectives: (I) to geometrically interpret the methods, (II) to investigate, by means of simulations, situations in which the algorithms are best indicated, (III) to compare with other classical methods and (IV) to apply them to simulated and experimental systems. At first, basic concepts are reviewed: data modeling in state space, block matrices and vectors, geometric and statistical tools. These concepts are critical to understanding the theory behind subspace identification. Later, in the case of deterministic subspace identification, a comprehensive study about how state matrices can be obtained from input-output data is provided. In this study, the algorithms N4SID and MOESP are presented. Subsequently, the stochastic case is treated similarly to the deterministic one. It is shown that the methods N4SID and MOESP are robust to white measurement noise. However, when the methods are exposed to colored noise, either measurement or process, these estimators are biased. One alternative is to use instrumental variable methods. Two such algorithms are presented: MOESP-PI and MOESP-PO. Demonstrations and simulated examples are presented, in order to facilitate the understanding of the characteristics of subspaces methods. Finally, the methods N4SID, MOESP, MOESP-PO, MOESP-PI are applied to three multivariable systems. The first system is a simulated model of a DC motor. The other two are experimental systems, namely water pumping system and a column flotation system. The results suggest that the subspace methods are a feasible alternative for linear systems of multiple inputs and multiple outputs.

Keywords: System identification; Subspace methods; State-space models; Multivariable systems; Linear systems.

Lista de Figuras

1.1	Diagrama de blocos representando um sistema multivariável.	2
1.2	Número de publicações por ano, dados de 1990 até 2011. Fonte: <i>Web of Science</i> . Tema: <i>Subspace Identification</i> . Data: 06/09/2011.	3
1.3	Evolução histórica dos métodos de subespaços.	5
2.1	Diagrama esquemático: métodos de subespaços \times métodos tradicionais.	10
2.2	Interpretação da projeção oblíqua em um espaço de dimensão $j = 3$	19
2.3	Interpretação da projeção oblíqua em um espaço de dimensão $j = 2$	20
2.4	Estudo da redução do efeito do ruído adicionado a dados de entrada de um sistema com o aumento do número de amostras.	22
3.1	Vetores no espaço linha da matriz em blocos de Hankel Y_f são obtidos como combinações lineares de vetores no espaço linha das sequências de estado X_f e vetores no espaço linha da matriz em blocos de Hankel U_f	26
3.2	Interpretação da projeção oblíqua de dados em um espaço de dimensão $j = 2$	30
3.3	Circuito RLC série.	31
3.4	Sinais de entrada (u_k) e saída (y_k), em volts, do circuito RLC.	32
3.5	Valores singulares da matriz O_i para ruído branco adicionado à saída para diferentes valores de relação sinal ruído (<i>SNR</i>).	32
3.6	Formas distintas de obter as matrizes do sistema para o caso determinístico.	33
3.7	Diagrama esquemático do procedimento para identificação por subespaços para o método MOESP.	35
3.8	Diagrama esquemático do procedimento para identificação por subespaços para o método N4SID.	37
3.9	Comparação dos autovalores estimados com o autovalor original do circuito RLC.	38
4.1	Projeção ortogonal nos dados de entrada e saída.	43
4.2	Projeção oblíqua nos dados de entrada e saída.	44
4.3	Formas distintas de obter as matrizes do sistema para o caso estocástico.	47

4.4	Comparação dos valores singulares estimados pelos métodos MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO para a determinação da ordem do sistema.	53
4.5	Validação por simulação livre dos modelos obtidos para o circuito RLC.	53
4.6	Comparação dos autovalores estimados com o autovalor original da matriz A do circuito RLC para 100 realizações de ruído de medição colorido.	54
4.7	Comparação dos métodos por meio do erro de estimação dos autovalores do circuito RLC para 100 realizações de ruído.	55
4.8	Comparação dos métodos por meio do RMSE das séries temporais do circuito RLC para 100 realizações de ruído.	56
5.1	Diagrama esquemático do motor de corrente contínua.	60
5.2	Dados de identificação do motor CC.	62
5.3	Validação por simulação livre dos modelos obtidos para o motor de corrente contínua.	62
5.4	Gráfico do logarítmico do erro de ajuste dos modelos aos dados.	63
5.5	Esquemático do sistema de bombeamento de água.	64
5.6	Dados de identificação da planta de bombeamento de água.	65
5.7	Validação dinâmica para os modelos lineares obtidos para a planta de bombeamento de água.	68
5.8	Autocorrelação dos resíduos e correlação cruzada dos resíduos com a entrada dos modelos ARMAX (obtidos pelo MQE).	68
5.9	Autocorrelações não-lineares dos resíduos do modelo ARMAX obtido pelo MQE para \mathcal{F}_1	70
5.10	Autocorrelações não-lineares dos resíduos do modelo ARMAX obtido pelo MQE para \mathcal{F}_2	70
5.11	Representação esquemática de uma coluna de flotação.	72
5.12	Teste de identificação da planta piloto de flotação em coluna, sinais de entrada.	73
5.13	Teste de identificação da planta piloto de flotação em coluna, sinais de saída.	74
5.14	Teste de validação da planta piloto de flotação em coluna, sinais de entrada.	74
5.15	Teste de validação da planta piloto de flotação em coluna, sinais de saída.	75
5.16	Determinação da ordem \hat{n} do sistema a partir dos valores singulares.	75
5.17	Validação dos modelos (5.7), (5.8), (5.9) e (5.10) MIMO.	78

Lista de Tabelas

3.1	Definições das matrizes de ponderação para os algoritmos N4SID e MOESP. . .	38
4.1	Quadro comparando o desempenho dos métodos em relação ao erro ao estimar os autovalores da matriz A do circuito RLC e com relação ao índice RMSE.	56
5.1	Comparação entre os modelos obtidos para o motor CC.	63
5.2	Comparação entre os modelos obtidos para a planta de bombeamento de água.	69
5.3	Comparação entre os modelos obtidos para a planta de flotação em coluna.	79

Lista de Símbolos

Capítulo 2

u_k	Entrada de sistemas não autônomos no instante $k \in \mathbb{R}^m$;
y_k	Sinal de saída no instante $k \in \mathbb{R}^l$;
x_k	Vetor de estados no instante $k \in \mathbb{R}^n$;
A	Matriz dinâmica do sistema $\in \mathbb{R}^{n \times n}$;
B	Matriz de entrada $\in \mathbb{R}^{n \times m}$;
C	Matriz de saída $\in \mathbb{R}^{l \times n}$;
D	Matriz de transmissão direta $\in \mathbb{R}^{l \times m}$;
w_k	Vetor de ruído de processo $\in \mathbb{R}^n$;
v_k	Vetor de ruído de medição $\in \mathbb{R}^l$;
Q	Matriz de covariância da sequência de ruído w_k , $\mathbf{E}(w_k w_k^T) \in \mathbb{R}^{n \times n}$;
R	Matriz de covariância da sequência de ruído v_k , $\mathbf{E}(v_k v_k^T) \in \mathbb{R}^{l \times l}$;
S	Matriz de covariância das sequências de ruído w_k e v_k , $\mathbf{E}(w_k v_k^T) \in \mathbb{R}^{n \times l}$;
\mathbb{R}	Números reais;
\mathbb{R}^n	$\mathbb{R}^{n \times 1}$ (vetores reais tipo coluna);
\in	Pertence (é um elemento de);
$\mathbf{E}[\bullet]$	Esperança matemática;
$(\bullet)^T$	Transposição de vetores ou matrizes;
N	Número de medições;
n	Ordem do modelo;
\hat{x}	Valor estimado de x ;
$\ A\ _F$	Norma de Frobenius da matriz A , $\sqrt{\text{tr } A^* A}$;
$\text{tr } A$	Traço de A ;
A^*	\overline{A}^T Conjugado transposto de A ;
\mathbb{N}	Espaço dos números naturais;
$U_{0 2i-1}$	Matriz em blocos de Hankel da entrada $\in \mathbb{R}^{2mi \times j}$;
i e j	Índices definidos pelo usuário $\in \mathbb{N}$, tal que, $i \geq n$ e $j \gg i$;
U_p e U_f	Notação utilizada na matriz em blocos de Hankel da entrada para dividi-la em dados passados (p) e futuros (f);
u^\bullet	Faz referência a uma dada entrada;
$Y_{0 2i-1}$	Matriz em blocos de Hankel da saída;
Y_p e Y_f	Notação utilizada na matriz em blocos de Hankel da saída para dividi-la em dados passados (p) e futuros (f);
$(\bullet)^+$	Adicionar um bloco linha em (\bullet) ;
$(\bullet)^-$	Retirar um bloco linha em (\bullet) ;
\square	Fim de demonstração;
W_p	Matriz em blocos de Hankel definida pelo empilhamento de entradas e saída;
X_i	Sequências de estados $\in \mathbb{R}^{n \times j}$;
X_p	Sequências de estados passados;
X_f	Sequências de estados futuros;

Γ_i	$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{li \times n}$ (matriz de observabilidade estendida);
Δ_i^d	$\begin{pmatrix} A^{i-1}B & A^{i-2}B & \dots & AB & B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times mi}$ (matriz de controlabilidade estendida determinística);
Δ_i^s	$\begin{pmatrix} A^{i-1}K & A^{i-2}K & \dots & AK & K \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times mi}$ (matriz de controlabilidade estendida estocástica);
H_i^d	$\begin{pmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \dots & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{li \times mi}$ (matriz em blocos triangular inferior de Toeplitz determinística);
H_i^s	$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CK & I & 0 & \dots & 0 \\ CAK & CK & I & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}K & CA^{i-3}K & CA^{i-4}K & \dots & I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{li \times li}$ (matriz em blocos triangular inferior de Toeplitz estocástica);
$\max(A)$	Maior valor de A ;
Π_B	$B^T(BB^T)^+B \in \mathbb{R}^{j \times j}$ (projeta o espaço linha de uma matriz qualquer ortogonalmente no espaço linha da matriz B);
A^+	(Moore-Penrose) pseudo inversa de A ;
Π_{B^\perp}	$I_j - B^T(BB^T)^+B \in \mathbb{R}^{j \times j}$ (projeta o espaço linha de uma matriz qualquer ortogonalmente no espaço linha da matriz B^\perp);
B^\perp	Complemento ortogonal de B ;
I_j	Matriz identidade $j \times j$;
A/B	$A\Pi_B = AB^T(BB^T)^+B$ (projeção ortogonal do espaço linha de A no espaço linha de B);
A/B^\perp	$A\Pi_{B^\perp} = A - A/B = A(I_j - B^T(BB^T)^+B)$ (projeção ortogonal de A no complemento ortogonal de B);
C/B^\perp	Projeção ortogonal de C no complemento ortogonal de B ;
\triangleq	Iguais por definição;
A/CB	Projeção oblíqua do espaço linha de A ao longo do espaço linha de C no espaço linha de B ;
A/BC	Projeção oblíqua do espaço linha de A ao longo do espaço linha de B no espaço linha de C ;
$A/\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$	Projeção ortogonal do espaço linha de A ao longo do espaço linha de B e C ;
$LQ(A)$	Decomposição LQ de A , L é a matriz triangular inferior e Q é a matriz ortogonal $Q^T = Q^{-1}$;
$\mathbf{E}_j[\bullet]$	$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j}[\bullet]$ (Média ao longo de um experimento suficientemente longo);
$\dim(\bullet)$	Dimensão de \bullet ;
$\ \bullet\ $	Norma Euclidiana;
$\Phi_{[A,B]}$	Covariância entre as matrizes A e B .

Capítulo 3

$Y_f/U_f W_p$	Projeção oblíqua das saídas futuras no espaço linha dos dados passados ao longo do espaço linha das entradas futuras;
O_i	Matriz obtida pela projeção oblíqua;
$A = USV^T$	$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (decomposição em valores singulares de A);
\subseteq	Está contido;
\bullet	Conjugado de \bullet ;
$\overline{U_1 S_1^{1/2}}$	$U_1 S_1^{1/2} \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times n}$ sem o primeiro bloco linha;
$\overline{U_1 S_1^{1/2}}$	$U_1 S_1^{1/2} \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times n}$ sem o último bloco linha;
$\overline{R^{uu}}$	$\Phi_{[U_{02i-1}, U_{02i-1}]}$ (matriz de covariância da entrada);
W_1	$\in \mathbb{R}^{li \times li}$ matriz de ponderação definidas pelo usuário;
W_2	$\in \mathbb{R}^{j \times j}$ matriz de ponderação definidas pelo usuário;
R, L e C	Resistência (Ohms), indutância (Henry) e capacitância (Farads);
σ	Desvio padrão;
Γ_i	$\begin{pmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{i-2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times n}$, Γ_i sem o último bloco linha;
$\overline{\Gamma}_i$	$\begin{pmatrix} CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times n}$, Γ_i sem o primeiro bloco linha;
Γ_i^\perp	$\in \mathbb{R}^{(li-n) \times li}$, matriz de posto completo que satisfaz $\Gamma_i^\perp \Gamma_i = 0$;
$\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & \cdots & M_i \end{pmatrix}$	$\Gamma_i^\perp Y_f U_f^\perp$, em que $M_i \in \mathbb{R}^{(li-n) \times m}$;
$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 & \cdots & \mathcal{L}_i \end{pmatrix}$	Γ_i^\perp , em que $\mathcal{L}_i \in \mathbb{R}^{(li-n) \times l}$;
\mathcal{X}	$\begin{pmatrix} \hat{X}_i \\ U_i \end{pmatrix}$;
\mathcal{Y}	$\begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_i \end{pmatrix}$;
Θ	$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, solução obtida de $\Theta = \mathcal{Y} \mathcal{X}^\perp = \mathcal{Y} \mathcal{X}^T (\mathcal{X} \mathcal{X}^T)^{-1}$;
e_k	Sequência de ruído branco.

Capítulo 4

K	Ganho de Kalman em estado estacionário;
R_e	$E[e_k e_k^T]$, matriz de covariância do ruído;
E_p	Matriz de ruído passado;
E_f	Matriz de ruído futuro;
$Y_f / \begin{pmatrix} W_p \\ U_f \end{pmatrix}$	Projeção ortogonal de Y_f no subespaço gerado por W_p e U_f ;
ε	Termo de ruído adicionado aos dados;
$\Pi_{U_f}^\perp$;
Z_j	Variável de instrumentos;
σ_s^2	Variância do sinal;
σ_n^2	Variância do ruído;

Capítulo 5

V/F	Relação tensão-frequência;
f_a	Frequência de amostragem;
T_s	Taxa de amostragem em segundos;
f_s	Frequência de interesse contida nos dados;
T	Constante de tempo dominante;
\mathcal{F}	Modelo ARMAX ou NARMAX para a saída y_{\bullet} ;
\mathcal{P}	Modelo ARMAX para a saída y_{\bullet} ;
\mathcal{S}	Modelo ARMAX para a saída y_{\bullet} ;
$r_{\xi\xi}$	Autocorrelação dos resíduos;
$r_{\xi u}$	Correlação cruzada dos resíduos com a entrada;
$r_{\xi\xi^2}, r_{\xi^2\xi^2}$	Autocorrelação não-linear dos resíduos;
τ	Atraso;
Ttot(s)	Tempo de simulação total em segundos;
NT	Número de termos de processo;
$\theta(t)$	Deslocamento angular do rotor;
J	Momento de inércia;
b	Coefficiente do atrito viscoso rotacional;
$i(t)$	Corrente de armadura no instante t ;
$w(t)$	Velocidade angular do rotor;

Lista de Acrônimos

AIC	Crítério de Informação de Akaike (<i>Akaike's Information Criterion</i>);
ARC	Algoritmo Robusto Combinado;
ARMAX	Modelo Auto-Regressivo, de Média Móvel com entradas eXógenas (<i>AutoRegressive Moving Average model with eXogenous inputs</i>);
ARX	Modelo Auto-Regressivo com entradas eXógenas (<i>AutoRegressive model with eXogenous inputs</i>);
CBA	Congresso Brasileiro de Automática;
CC	Corrente Contínua;
CDTN	Centro de Desenvolvimento de Tecnologia Nuclear;
ERR	Taxa de Redução de Erro (<i>Error Reduction Ratio</i>);
LIT	Linear Invariante no Tempo;
LVT	Linear Variante no Tempo;
MA	Média Móvel (<i>Moving Average</i>);
MACSIN	Grupo de Modelagem, Análise e Controle de Sistemas Não-Lineares;
MB	Motobomba;
MIMO	Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas (<i>Multiple-Input Multiple-Output</i>);
MISO	Múltiplas Entradas e Uma Saída (<i>Multiple-Input Single-Output</i>);
MQE	Mínimos Quadrados Estendido;
MQG	Mínimos Quadrados Generalizado;
MOESP	<i>Multivariable Output-Error State sPace</i> ;
NARMAX	Modelo Não-Linear Auto-Regressivo, de Média Móvel com entradas eXógenas (<i>Nonlinear AutoRegressive Moving Average model with eXogenous inputs</i>);
NARX	Modelo Não-Linear Auto-Regressivo, com entradas eXógenas; (<i>Nonlinear AutoRegressive model with eXogenous inputs</i>);
NT	Número de Termos de processo;
N4SID	<i>Numerical Algorithms for Subspace State Space System IDentification</i> ;
PE	Predição de Erro;
PI	<i>Past Inputs</i> ;
PO	<i>Past Outputs</i> ;
PPGEE	Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica;
PRBS	Sinal binário pseudo-aleatório (<i>Pseudo Random Binary Signal</i> .);
RLC	Resistivo, Indutivo e Capacitivo;
RMSE	Raiz do Erro Médio Quadrático (<i>Root Mean Error Square</i>);
SNR	Relação Sinal Ruído (<i>Signal Noise Ratio</i>);
SIM	Métodos de Identificação por Subespaços (<i>Subspace Identification Methods</i>);
SISO	Uma Entrada e Uma Saída (<i>Single-Input Single-Output</i>);
SVD	Decomposição em Valores Singulares (<i>Singular Value Decomposition</i>);
VI	Variáveis Instrumentais;
Ttot(s)	Tempo, em segundos, para a estimação dos parâmetros pelo MATLAB;
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais;
VAF	Variância entre dois Sinais (<i>Variance Accounted For</i>).

Introdução

“Em verdade, em verdade vos digo: quem ouve a minha palavra e crê naquele que me enviou tem a vida eterna, não entra em juízo, mas passou da morte para a vida.”

Jo 5:24

1.1 Motivação e Justificativa

Na atualidade, cada vez mais, o trabalho de um engenheiro consiste na obtenção de modelos matemáticos dos processos estudados (Ljung, 1987). Projetos convencionais de sistemas de controle para sistemas dinâmicos, como por exemplo, processos químicos catalíticos, satélites espaciais, braços robóticos e veículos aéreos (Borjas e Garcia, 2004; Bauer, 2001; Moberg et al., 2009; Shim et al., 2000), dependem da disponibilidade de modelos que representem e descrevam alguns dos fenômenos dinâmicos envolvidos (Clavijo e Barreto, 2002).

Na modelagem matemática de sistemas, existem basicamente duas formas de obtenção de modelos: a identificação de sistemas (Ljung, 1987; Soderstrom e Stoica, 1989; Aguirre, 2007) e a modelagem pela física do processo (Garcia, 2005). A identificação de sistemas é uma forma empírica de obtenção de modelos, baseada em experimentos e coleta de dados, enquanto a modelagem pela física do processo é um procedimento baseado no conhecimento sobre os fenômenos envolvidos. Sabe-se que o conhecimento das relações físicas do processo pode exigir um esforço significativo e específico para cada sistema, o que muitas vezes é difícil. Por outro lado, a identificação de sistemas, exige pouco ou praticamente nenhum conhecimento específico do processo. Por essas razões, têm sido de grande interesse estudar essa área.

Em engenharia, na maioria dos casos, não se tem conhecimento sobre as relações físicas que regem a dinâmica de um sistema. Entretanto, os dados de entrada e saída do sistema podem ser mensurados e, portanto, estão disponíveis, como exemplificado na Figura 1.1, que apresenta um sistema no qual deseja-se encontrar um modelo matemático que represente sua dinâmica. Este tipo de modelagem, em que somente os dados de entrada e saída são conhecidos, é denominado modelagem caixa-preta. Dentre os métodos de modelagem caixa-preta para sistemas lineares, pode-se citar dois métodos de identificação: os métodos de predição de erro e os métodos de identificação por

subespaços. Nos métodos de predição de erro, para se modelar o sistema em questão é necessário uma equação de regressão para cada saída. Por outro lado, nos métodos de identificação por subespaços o modelo desse sistema pode ser representado apenas por uma equação em espaço de estados.

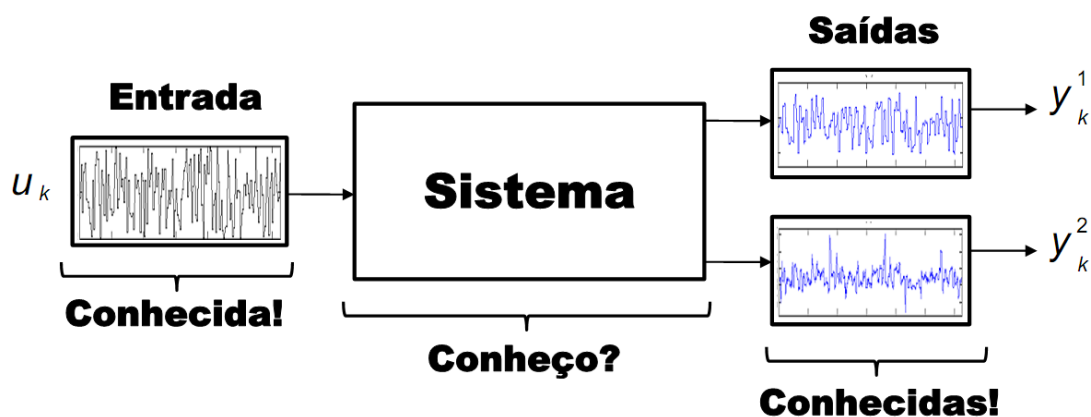


Figura 1.1: Diagrama de blocos representando um sistema multivariável que se deseja modelar.

Devido a parametrização simples e generalista de sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), os métodos de subespaços oferecem uma alternativa atrativa dentre as técnicas que obtêm modelos por meio de dados de entrada e saída. Pois, tais métodos utilizam técnicas de álgebra linear e algoritmos não iterativos, que estimam as matrizes de estados de forma rápida. Graças a forma na qual os modelos são obtidos, a popularidade desses métodos na indústria aumentaram de forma significativa nos últimos anos (Favoreel, 2000; Wang e Qin, 2002; Góes e Tostes, 2003; Borjas e Garcia, 2004; Chui e Maciejowski, 2005). Tendo em vista que sistemas de grandes dimensões são comumente encontrados na indústria, a aplicação dos algoritmos de identificação por subespaços neste campo é bastante promissora (Van Overschee e De Moor, 1996). Além do mais, esses modelos são convenientes para a estimação, filtragem, predição e controle de sistemas (Qin, 2006).

A fim de verificar a relevância da identificação por subespaços no cenário mundial, realizou-se uma pesquisa no *Web of Science*, em que foi analisado o número de publicações que tratavam sobre o tema *Subspace Identification*. Como se pode observar na Figura 1.2, a partir da década de 90, houve um crescente número de publicações nessa área. No âmbito nacional, alguns pesquisadores, tais como, (Clavijo e Barreto, 2002) e (Borjas e Garcia, 2004), vêm desenvolvendo trabalhos com estes métodos. Entretanto, dada a relevância internacional do tema, ainda são poucas as publicações nacionais. Como exemplo, pode-se citar o CBA 2010¹, no qual apenas um trabalho versando sobre o assunto foi publicado em seus anais Giesbrecht e Bottura (2010).

¹Congresso Brasileiro de Automática 2010, Bonito-MS.

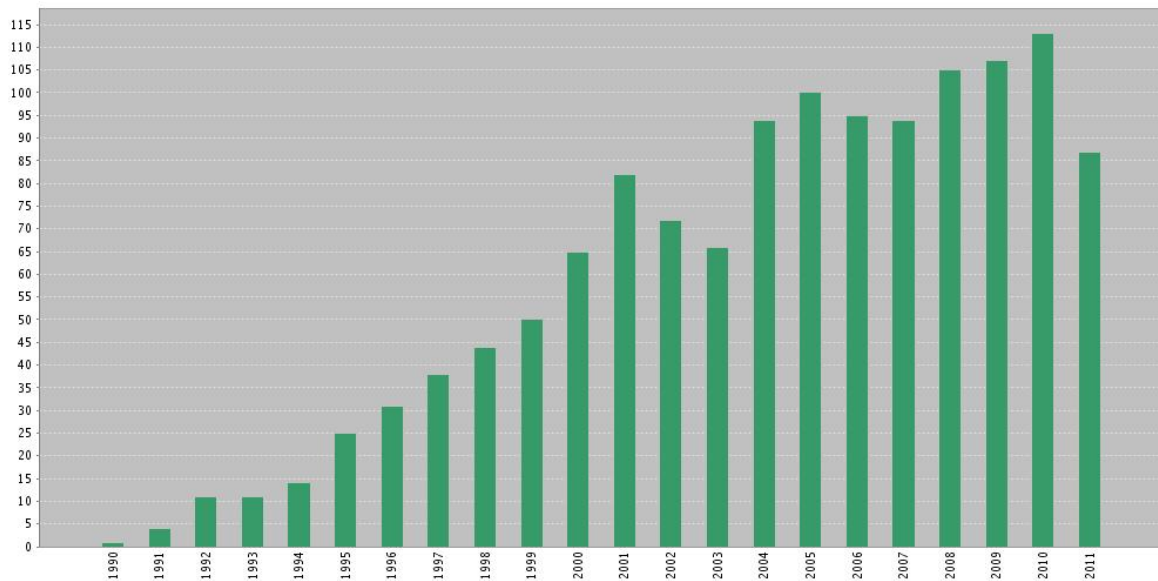


Figura 1.2: Número de publicações por ano, dados de 1990 até 2011. Fonte: *Web of Science*. Tema: *Subspace Identification*. Data: 06/09/2011.

Dessa forma, esta dissertação nasceu da motivação principal de dar um passo na direção de entender e difundir melhor as técnicas de identificação por subespaços no cenário do PPGEE-UFMG². Vale ressaltar que trata-se da primeira dissertação do PPGEE nessa vertente.

Ao longo da dissertação, pretende-se comparar o desempenho dos métodos de identificação por subespaços com os métodos clássicos de identificação de sistemas, como os métodos de predição de erro. Isso será feito por meio de sistemas teste, conhecidos também como, *benchmarks*. Esses *benchmarks* serão sistemas que já foram analisados no contexto do PPGEE-UFMG, ou quando couber, de novos sistemas.

1.2 Breve Histórico

Como exemplificado na Figura 1.3, os métodos de subespaços tiveram sua origem a partir do trabalho de [Ho e Kalman \(1966\)](#), sobre a teoria da realização para sistemas determinísticos. Em resumo, na abordagem apresentada por [Ho e Kalman \(1966\)](#) eram necessárias as respostas ao impulso do sistema em vários instantes de tempo, o que na prática era inviável. Depois, em meados da década de 70, Hirotugo Akaike publicou o trabalho *Stochastic theory of minimal realization* ([Akaike, 1974b](#)) que tratava sobre a teoria da realização estocástica. Começavam a surgir algoritmos eficientes e estáveis

²PPGEE-UFMG - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais. Sítio: <http://www.cpdee.ufmg.br/>

graças ao uso de ferramentas de álgebra linear, tal como, a decomposição em valores singulares (SVD). Quatorze anos depois do trabalho de Akaike, em 1988, Bart De Moor defende sua tese de doutorado na Universidade Católica de Leuven (De Moor, 1988), na Bélgica, trazendo um novo conceito definido por *identificação por subespaços* para sistemas determinísticos. Em 1992, Michael Verhaegen publica uma série de artigos (Verhaegen e Dewilde, 1992a,b, 1993) que tratam os métodos conhecidos como MOESP, para sistemas determinísticos e estocásticos. Deve-se ressaltar que, diferentemente, dos métodos estudados por De Moor, a metodologia MOESP não utilizava o conhecimento dos estados do sistema para estimar as matrizes do sistema em espaço de estados, tais matrizes são obtidas diretamente de uma matriz de observabilidade estendida, a definição de tal matriz será apresentada no próximo capítulo. Pouco tempo depois, em 1995 Peter Van Overschee, orientado pelo professor De Moor, defende sua tese de doutorado (Van Overschee, 1995), também na Universidade Católica de Leuven, apresentando os métodos conhecidos como N4SID para sistemas determinísticos e estocásticos. Os métodos apresentados nesse trabalho utilizam a mesma abordagem apresentada por De Moor em 1988. Um ponto interessante é que Van Overschee (1995) mostra há uma equivalência entre os métodos N4SID e MOESP, que diferem exceto por matrizes de ponderação. Do trabalho de Van Overschee (1995), surgiu o primeiro livro que tratava a teoria de identificação por subespaços de forma abrangente e aplicável a sistemas industriais (Van Overschee e De Moor, 1996). A partir desse marco, a teoria se difundiu rapidamente e nos últimos 20 anos tem atraído a atenção da comunidade científica internacional e de pesquisadores renomados, tais como, Ljung e McKelvey (1996), Favoreel (2000), Barreto e Bottura (2003), Katayama (2005) e Qin (2006).

1.3 Objetivos

O principal objetivo desta dissertação é o estudo dos métodos de identificação por subespaços. Como objetivo específico desse estudo, pretende-se comparar o desempenho dos algoritmos N4SID, MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO com algum algoritmo clássico de identificação de sistemas, tal como, o MQE. Para isto, serão utilizados sistemas experimentais e simulados. Por meio dessa abordagem pretende-se analisar e quantificar o desempenho dos métodos por subespaços perante diferentes abordagens.

1.4 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação está organizada em seis capítulos da seguinte forma:

No Capítulo 1, a identificação de sistemas é introduzida fornecendo o contexto, a motivação e a justificativa para o estudo dos métodos de identificação por subespaços. Neste capítulo também são apresentados os objetivos principais da dissertação bem como uma definição geral da estrutura do texto.

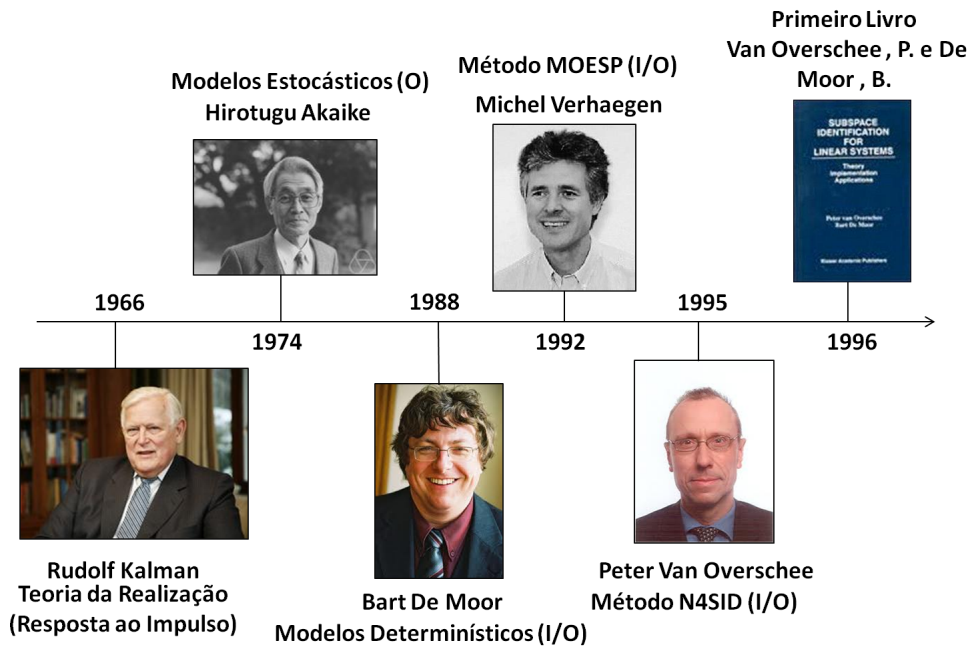


Figura 1.3: Evolução histórica dos métodos de subespaços.

O Capítulo 2 traz uma revisão das ferramentas essenciais para o entendimento da teoria de identificação por subespaços, como os modelos em espaço de estados e as ferramentas geométricas de projeção ortogonal e oblíqua. Também são introduzidas ao leitor as notações que foram utilizadas ao longo do texto. O Apêndice A apresenta algumas definições, lemas, operações matriciais e conceitos que complementam os conteúdos abordados no Capítulo 2.

No Capítulo 3 é descrito o método de identificação por subespaços para sistemas determinísticos. Nesse capítulo, são derivadas equações matriciais fundamentais para o entendimento da teoria de identificação por subespaços. Demonstrações e simulações são fornecidas para facilitar a compreensão pelo leitor.

O Capítulo 4, por sua vez, traz o método de identificação por subespaços para sistemas estocásticos. Teoremas são apresentados e uma interpretação geométrica dos métodos é mostrada. Apresentam-se, também, simulações detalhadas de algoritmos estocásticos. O Apêndice B, expõe algumas demonstrações de equações matriciais entrada-saída que complementam as demonstrações feitas nos Capítulos 3 e 4.

No Capítulo 5, toda a metodologia investigada é aplicada a dois sistemas experimentais (planta de bombeamento de água e planta de flotação em coluna) e um simulado (motor de corrente contínua com campo constante). Os resultados obtidos são comparados com outro método de identificação baseado na predição de erro (mínimos quadrados estendidos).

Por fim, as conclusões, considerações finais sobre o trabalho e as propostas para

pesquisas futuras são apresentadas no Capítulo 6.

Prolegômenos

“Quando uma criatura humana desperta para um grande sonho e sobre ele lança toda a força de sua alma, todo o universo conspira a seu favor.”

Goethe

2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar algumas notações e ferramentas essenciais para o entendimento da teoria de identificação por subespaços. Para este propósito, o presente capítulo segue, em linhas gerais, as abordagens expostas em [Van Overschee e De Moor \(1996\)](#) e [Katayama \(2005\)](#) sobre os métodos de identificação por subespaços. Tentou-se, de alguma forma, simplificar e, em outras partes, detalhar alguns conceitos necessários para a implementação desses algoritmos. Sendo assim, primeiramente, na Seção 2.2 serão descritos os modelos em espaço de estados e o problema geral da identificação por subespaços. Na Seção 2.3, será discutido o princípio básico de como as matrizes dos modelos em espaço de estados são obtidas pelos métodos de subespaço e quais as principais diferenças entre esses métodos e os métodos clássicos. Logo após, na Seção 2.4, serão apresentadas algumas notações matriciais que serão, nos capítulos posteriores, utilizadas para apresentar os algoritmos de subespaço. Na Seção 2.5, serão mostradas as ferramentas geométricas de projeção ortogonal e oblíqua, bem como sua obtenção e interpretação geométrica. Alguns conceitos estatísticos, necessários para a compreensão dos métodos de identificação, serão expostos na Seção 2.6. Na Seção 2.7 são apresentados os índices de qualidade utilizados para comparar os algoritmos que serão investigados nos capítulos posteriores. Por fim, a Seção 2.8 encerra este capítulo com comentários e conclusões.

2.2 Formulação do Problema

Os métodos de identificação por subespaços tratam sistemas discretos, lineares e invariantes no tempo. Basicamente o método visa, por meio de dados medidos de entrada u_k e saída y_k , a encontrar os estados x_k e as matrizes do modelo em espaço de estados, descrito por:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k, \quad (2.1)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k + v_k, \quad (2.2)$$

com

$$\mathbf{E} \left[\begin{pmatrix} w_k \\ v_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_k^T & v_k^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

em que os vetores $u_k \in \mathbb{R}^m$ e $y_k \in \mathbb{R}^l$ são as medições das entradas e saídas, respectivamente, no instante de tempo k , enquanto $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados. A matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz dinâmica do sistema, que é caracterizada por seus autovalores, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de entrada, ela representa uma transformação linear pela qual as entradas determinísticas influenciam o estado no próximo instante, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ é a matriz de saída, ela descreve como os estados são “transferidos” para as observações y_k , e o termo $D \in \mathbb{R}^{l \times m}$ é a matriz de transmissão direta. As variáveis $w_k \in \mathbb{R}^n$ e $v_k \in \mathbb{R}^l$ são vetores não mensuráveis conhecidos como ruído de processo e de medição, respectivamente. Supõe-se que esses ruídos são brancos, estacionários, não correlacionados entre si e possuam média nula. $\mathbf{E}[\bullet]$ denota o operador valor esperado. As matrizes $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{n \times l}$ e $S \in \mathbb{R}^{l \times l}$ são as matrizes de covariância das sequências de ruído w_k e v_k . A matriz em blocos (2.3) é assumida ser positiva definida. O par de matrizes $\{A, C\}$ é assumido ser observável, isso implica que todos os modos dinâmicos do sistema podem ser observados a partir da saída y_k , ou seja, eles podem ser identificados. Supõe-se que o par de matrizes $\{A, [B \ Q^{1/2}]\}$ é controlável, isso implica que os modos dinâmicos do sistema podem ser excitados pela entrada determinística u_k e/ou pela entrada estocástica w_k . Também, necessita-se que a seguinte condição de ortogonalidade seja verdadeira:

$$\mathbf{E} \left[\begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_k^T & v_k^T \end{pmatrix} \right] = 0_{(n+m) \times (n+l)}. \quad (2.4)$$

No quadro a seguir é enunciado o problema principal da identificação por subespaços no domínio do tempo:

Dado um número suficiente N de medições das entradas u_k e saídas y_k geradas pelo sistema desconhecido (2.1) e (2.2), determinar, usando somente as N medições, a ordem n e as matrizes A, B, C, D, Q, R e S do sistema.

2.3 Ideias Básicas

O diferencial dos métodos de identificação por subespaços em relação aos métodos clássicos é a facilidade de obter as sequências de estados de um sistema dinâmico diretamente a partir das medições dos dados de entrada e saída. Esse diferencial é obtido

por meio de ferramentas algébricas e não por métodos iterativos como nos métodos mínimos quadrados estendido (MQE), mínimos quadrados generalizado (MQG), filtro de Kalman, entre outros (Soderstrom e Stoica, 1989; Ljung, 1987; Aguirre, 2007). Em um primeiro momento, de posse dos dados de entrada-saída, os métodos de subespaço estimam os estados e, posteriormente, são obtidas as matrizes do sistema do seguinte sistema linear

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{i+1} & x_{i+2} & \cdots & x_{i+j} \\ y_i & y_{i+1} & \cdots & y_{i+j-1} \end{pmatrix}}_{\text{conhecido}} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} & \cdots & x_{i+j-1} \\ u_i & u_{i+1} & \cdots & u_{i+j-1} \end{pmatrix}}_{\text{conhecido}} + \begin{pmatrix} w_i & w_{i+1} & \cdots & w_{i+j-1} \\ v_i & v_{i+1} & \cdots & v_{i+j-1} \end{pmatrix},$$

o significado dos parâmetros i e j são esclarecidos na Seção 2.4.1.

Em suma, os dois principais passos dos algoritmos de identificação por subespaço são (De Cock e De Moor, 2003):

- (a) Determinar a ordem n do modelo e as estimativas das sequências de estados $\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}, \dots, \hat{x}_{i+j}$, em que $\hat{\cdot}$ denota o valor estimado. Primeiramente, os estados são encontrados pela projeção no espaço de linhas das matrizes de dados em blocos de Hankel e, depois, pela decomposição em valores singulares.
- (b) Resolver o problema de mínimos quadrados para obter as matrizes em espaços de estados:

$$\begin{pmatrix} \widehat{A} & \widehat{B} \\ \widehat{C} & \widehat{D} \end{pmatrix} = \min_{A,B,C,D} \left\| \begin{pmatrix} \hat{x}_{i+1} & \hat{x}_{i+2} & \cdots & \hat{x}_{i+j} \\ y_i & y_{i+1} & \cdots & y_{i+j-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_i & \hat{x}_{i+1} & \cdots & \hat{x}_{i+j-1} \\ u_i & u_{i+1} & \cdots & u_{i+j-1} \end{pmatrix} \right\|_F^2,$$

em que $\|\cdot\|_F$ denota a norma de Frobenius da matriz. As estimativas das matrizes de covariância de ruído são obtidas por:

$$\begin{pmatrix} \widehat{Q} & \widehat{S} \\ \widehat{S}^T & \widehat{R} \end{pmatrix} = \frac{1}{j} \begin{pmatrix} \rho_{w_i} & \rho_{w_{i+1}} & \cdots & \rho_{w_{i+j-1}} \\ \rho_{v_i} & \rho_{v_{i+1}} & \cdots & \rho_{v_{i+j-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{w_i} & \rho_{w_{i+1}} & \cdots & \rho_{w_{i+j-1}} \\ \rho_{v_i} & \rho_{v_{i+1}} & \cdots & \rho_{v_{i+j-1}} \end{pmatrix}^T,$$

no qual $\rho_{w_k} = \hat{x}_{k+1} - \widehat{A}\hat{x}_k - \widehat{B}u_k$ e $\rho_{v_k} = y_k - \widehat{C}\hat{x}_k - \widehat{D}u_k$, para $k = i, \dots, i+j-1$, são os resíduos dos mínimos quadrados.

A boa robustez numérica dos algoritmos de identificação por subespaços é devida a métodos numéricos de álgebra linear largamente conhecidos, tais como: decomposição QR, decomposição em valores singulares (SVD) e suas generalizações, e.g. decomposição LQ (Bernstein, 2005).

Nos métodos clássicos, a abordagem é oposta, primeiro estimam-se as matrizes do sistema e depois seus estados. A diferença entre os métodos clássicos e os métodos por subespaços é ilustrada na Figura 2.1.

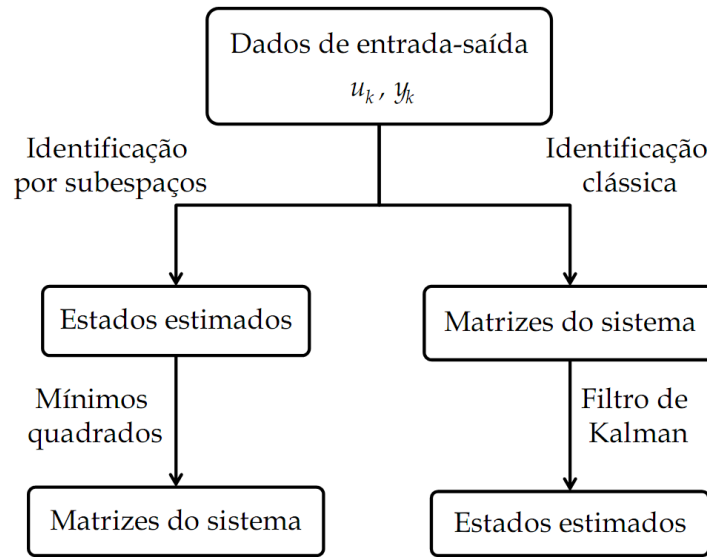


Figura 2.1: Diagrama esquemático: métodos de subespaços \times métodos tradicionais. A identificação de sistemas visa construir modelos em espaço de estados a partir de dados de entrada e saída. À esquerda, ilustra-se o método de identificação por subespaços: primeiro obtém-se os estados e depois as matrizes do sistema. À direita, exemplifica-se o método clássico: primeiro obtém-se as matrizes do sistema e, então, estimam-se os estados. Adaptado de [Van Overschee e De Moor \(1996\)](#).

2.4 Notações

2.4.1 Matrizes em Blocos de Hankel

As matrizes em blocos de Hankel são importantíssimas para os algoritmos de identificação por subespaços. Essas matrizes são facilmente construídas a partir dados de entrada e/ou saída de um sistema. Para construção dessas matrizes, considere i e $j \in \mathbb{N}$, índices definidos pelo usuário, tal que, $i \geq n$ e $j \gg i$. As matrizes em blocos de Hankel são definidas como:

$$U_{0|2i-1} \triangleq \overbrace{\left(\begin{array}{cccc} u_0 & u_1 & \dots & u_{j-1} \\ u_1 & u_2 & \dots & u_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i-1} & u_i & \dots & u_{i+j-2} \\ \hline u_i & u_{i+1} & \dots & u_{i+j-1} \\ u_{i+1} & u_{i+2} & \dots & u_{i+j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{2i-1} & u_{2i} & \dots & u_{2i+j-2} \end{array} \right)}^{j \text{ colunas}} \left. \vphantom{\begin{array}{c} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{i-1} \\ u_i \\ u_{i+1} \\ \vdots \\ u_{2i-1} \end{array}} \right\} 2i \text{ bloco linhas} \quad (2.5)$$

$$U_{0|2i-1} = \begin{pmatrix} U_{0|i-1} \\ U_{i|2i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_p \\ U_f \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Deve ser notado que cada elemento bloco linha de $U_{0|2i-1}$ pode possuir m entradas. Como $U_{0|2i-1}$ tem $2i$ bloco linhas, observa-se que a matriz $U_{0|2i-1}$ tem $2mi$ linhas. Portanto, $U_{0|2i-1} \in \mathbb{R}^{2mi \times j}$.

Um outro ponto importante a ser notado na matriz (2.5) é que o número de colunas j é dado por:

$$j = N - 2i + 1. \quad (2.7)$$

Ao analisar a matriz (2.5) verifica-se que na primeira linha todos os vetores de entrada são elementos novos. Por outro lado, a partir da segunda linha somente o último elemento passa a ser uma nova medida. Isto mostra que todas as N amostras serão tomadas, pois:

$$N = \underbrace{u_0, u_1, u_2, \dots, u_{j-1}}_{j \text{ elementos}}, u_j, u_{j+1}, \dots, u_{2i+j-1} \Rightarrow j = N - 2i + 1. \quad (2.8)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{2i + j - 1 \text{ elementos}}$

Por razões estatísticas, é considerado, ao longo deste trabalho, que $N, j \rightarrow \infty$. Deve-se ressaltar que, para sistemas determinísticos, essa premissa não é necessária.

Nos exemplos 2.4.1 e 2.4.2, a seguir, as premissas $i \geq n$ e $j \gg i$ não foram levadas em conta. Contudo, o objetivo destes exemplos é verificar como são montadas as matrizes em bloco de Hankel e como suas ordens estão relacionadas.

Exemplo 2.4.1. Considere um sistema SISO¹ qualquer, em que foram tomadas $N = 9$ amostras da entrada, constituindo o vetor

$$\left[u_0^1 \ u_1^1 \ u_2^1 \ u_3^1 \ u_4^1 \ u_5^1 \ u_6^1 \ u_7^1 \ u_8^1 \right]^T, \quad (2.9)$$

em que, o superescrito u^\bullet faz referência de qual entrada foram tomadas as amostras. Neste caso, as amostras foram tomadas de apenas uma única entrada ($m = 1$).

Considerando $i = 2$ e $j = 9 - 2 \cdot 2 + 1 = 6$, portanto a matriz em bloco de Hankel fica:

$$U_{0|3} = \begin{pmatrix} u_0^1 & u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 & u_4^1 & u_5^1 \\ u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 & u_4^1 & u_5^1 & u_6^1 \\ u_2^1 & u_3^1 & u_4^1 & u_5^1 & u_6^1 & u_7^1 \\ u_3^1 & u_4^1 & u_5^1 & u_6^1 & u_7^1 & u_8^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}. \quad (2.10)$$

□

¹Do Inglês *single-input single-output*.

Exemplo 2.4.2. Agora considere um sistema MISO² qualquer, com duas entradas ($m = 2$) e com $N = 9$ amostras de cada entrada, conforme

$$\begin{bmatrix} u_0^1 & u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 & u_4^1 & u_5^1 & u_6^1 & u_7^1 & u_8^1 \\ u_0^2 & u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & u_4^2 & u_5^2 & u_6^2 & u_7^2 & u_8^2 \end{bmatrix}^T. \quad (2.11)$$

Considerando $i = 2$ e $j = 9 - 2 \cdot 2 + 1 = 6$, portanto a matriz em bloco de Hankel fica:

$$U_{0|3} = \begin{pmatrix} u_0^1 & u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 & u_4^1 & u_5^1 \\ u_0^2 & u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & u_4^2 & u_5^2 \\ u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 & u_4^1 & u_5^1 & u_6^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & u_4^2 & u_5^2 & u_6^2 \\ u_2^1 & u_3^1 & u_4^1 & u_5^1 & u_6^1 & u_7^1 \\ u_2^2 & u_3^2 & u_4^2 & u_5^2 & u_6^2 & u_7^2 \\ u_3^1 & u_4^1 & u_5^1 & u_6^1 & u_7^1 & u_8^1 \\ u_3^2 & u_4^2 & u_5^2 & u_6^2 & u_7^2 & u_8^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 6}. \quad (2.12)$$

□

Ainda, sobre a notação utilizada na matriz (2.5), pode-se verificar que ela é dividida em dados passados (subíndice p) e futuros (subíndice f); ver (2.6). Contudo, a distinção entre passado e futuro é um tanto arbitrária, por exemplo, as matrizes U_p e U_f possuem elementos do passado em comum. Todavia, cada uma das colunas correspondentes de U_p e U_f não possuem elementos em comum, e.g. $U_p = [u_0 \ u_1 \ \dots \ u_{i-1}]^T \neq U_f = [u_i \ u_{i+1} \ \dots \ u_{2i-1}]^T$, por isso a distinção. Ao se deslocar a borda entre dados passados e futuros uma linha para baixo, pode-se definir a matriz em blocos de Hankel (2.5) como³

$$U_{0|2i-1} \triangleq \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_{j-1} \\ u_1 & u_2 & \dots & u_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i-1} & u_i & \dots & u_{i+j-2} \\ u_i & u_{i+1} & \dots & u_{i+j-1} \\ u_{i+1} & u_{i+2} & \dots & u_{i+j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{2i-1} & u_{2i} & \dots & u_{2i+j-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{0|i} \\ U_{i+1|2i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_p^+ \\ U_f^- \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

As matrizes em blocos de Hankel da saída $Y_{0|2i-1}$, Y_p , Y_f , Y_p^+ e Y_f^- são definidas de forma similar às da entrada.

Também, pode-se definir as matrizes em blocos de Hankel pelo empilhamento de entradas e saídas, ou seja,

²Do Inglês *multiple-input single-output*.

³O sobrescrito “+” significa “adicionar um bloco linha” e o sobrescrito “-” equivale a “retirar um bloco linha”.

$$W_p \triangleq [U_p \quad Y_p]^T. \quad (2.14)$$

Nesse caso, as matrizes U_p e Y_p possuem o mesmo número de blocos linha i e colunas j . Da mesma forma define-se $W_p^+ \triangleq [U_p^+ \quad Y_p^+]^T$.

2.4.2 Sequências de Estados

De forma análoga às matrizes em blocos de Hankel, as sequências de estados desempenham um papel importante na derivação e interpretação dos algoritmos de identificação por subespaços. As sequências de estados são definidas como

$$X_i = \begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} & \cdots & x_{i+j-2} & x_{i+j-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times j}, \quad (2.15)$$

em que, o índice i denota o primeiro elemento da sequência de estados. Deve-se salientar, que cada elemento de X_i tem como dimensão a ordem n determinada para o sistema.

As sequências de estados passados e futuros são definidas respectivamente por

$$X_p = X_0 = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{j-2} & x_{j-1} \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

$$X_f = X_i = \begin{bmatrix} x_i & x_{i+1} & \cdots & x_{i+j-2} & x_{i+j-1} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

2.4.3 Matrizes do Modelo

Os algoritmos de identificação por subespaços utilizam matrizes de observabilidade e controlabilidade. A matriz de observabilidade estendida ($i > n$) é definida por:

$$\Gamma_i \triangleq \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{li \times n}. \quad (2.18)$$

Deve ser notado que o índice i denota o número de blocos linha. Cada bloco linha pode possuir l linhas. Portanto, a matriz Γ_i possui li linhas. Assumindo que o par $\{A, C\}$ seja observável, tem-se que $\text{posto}(\Gamma_i) = n$. As matrizes estendidas de controlabilidade Δ_i^d e Δ_i^s são definidas, respectivamente, por

$$\Delta_i^d \triangleq \begin{pmatrix} A^{i-1}B & A^{i-2}B & \cdots & AB & B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times mi}, \quad (2.19)$$

$$\Delta_i^s \triangleq \begin{pmatrix} A^{i-1}K & A^{i-2}K & \cdots & AK & K \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times mi}, \quad (2.20)$$

em que K é o ganho de Kalman em estado estacionário.

As matrizes em blocos triangular inferior de Toeplitz H_i^d e H_i^s são definidas, respectivamente, por

$$H_i^d \triangleq \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \cdots & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{li \times mi}, \quad (2.21)$$

$$H_i^s \triangleq \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CK & I & 0 & \cdots & 0 \\ CAK & CK & I & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}K & CA^{i-3}K & CA^{i-4}K & \cdots & I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{li \times li}. \quad (2.22)$$

2.5 Ferramentas Geométricas

Nas seções 2.5.1 e 2.5.2 serão introduzidas as principais ferramentas geométricas utilizadas na identificação de sistemas por subespaços. Contudo, em um primeiro momento, tais ferramentas serão apresentadas pelo ponto de vista da álgebra linear. Posteriormente, ao longo dos capítulos 3 e 4, esses conceitos serão relacionados com a teoria de identificação por subespaços: determinística e estocástica, respectivamente.

Também, nas seções 2.5.1 e 2.5.2 considera-se que as matrizes $A \in \mathbb{R}^{p \times j}$, $B \in \mathbb{R}^{q \times j}$ e $C \in \mathbb{R}^{r \times j}$ são conhecidas. Esta consideração visa apenas a generalizar as ferramentas apresentadas. Além disso, assume-se que $j \geq \max(p, q, r)$, o que é sempre desejável nos algoritmos de identificação.

2.5.1 Projeções Ortogonais

O operador $\Pi_B \in \mathbb{R}^{j \times j}$, que projeta o espaço linha de uma matriz qualquer no espaço linha da matriz B , é definido por

$$\Pi_B \triangleq B^T(BB^T)^\dagger B, \quad (2.23)$$

em que † denota a pseudo inversa de Moore-Penrose. Define-se, também, o operador $\Pi_{B^\perp} \in \mathbb{R}^{j \times j}$ que projeta o espaço linha de uma matriz qualquer no espaço linha de B^\perp (complemento ortogonal de B) por

$$\Pi_{B^\perp} \triangleq I_j - B^T(BB^T)^\dagger B. \quad (2.24)$$

Sendo assim, a *projeção ortogonal* do espaço linha de A no espaço linha de B é

denotada por A/B e sua representação é definida por:

$$A/B \triangleq A\Pi_B = AB^T(BB^T)^\dagger B. \quad (2.25)$$

Por outro lado, a *projeção ortogonal* de A no complemento ortogonal de B é definida por:

$$A/B^\perp \triangleq A\Pi_{B^\perp} = A - A/B = A(I_j - B^T(BB^T)^\dagger B). \quad (2.26)$$

Como pode ser observado, a matriz A é decomposta na soma das projeções ortogonais (2.25) e (2.26):

$$A = A\Pi_B + A\Pi_{B^\perp}. \quad (2.27)$$

As matrizes que representam estas projeções podem ser facilmente computadas por meio da decomposição LQ de $\begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix}$ como a seguir.

Lema 2.5.1. Sejam A e B matrizes de posto completo e seja a decomposição LQ de $\begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix}$ dada por:

$$\begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix} = LQ^T = \begin{pmatrix} L_{11} & 0_{q \times p} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

em que $L \in \mathbb{R}^{(p+q) \times (p+q)}$ é uma matriz triangular inferior, com $L_{11} \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $L_{21} \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $L_{22} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e, $Q \in \mathbb{R}^{j \times (p+q)}$ é ortogonal, ou seja, $Q^T Q = \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$. Então, as matrizes que representam as projeções ortogonais podem ser escritas como:

$$A/B = L_{21}Q_1^T, \quad (2.29)$$

$$A/B^\perp = L_{22}Q_2^T. \quad (2.30)$$

Demonstração. Prova das equações (2.29) e (2.30).

Da decomposição LQ (2.28) pode-se expressar A como

$$A = L_{21}Q_1^T + L_{22}Q_2^T. \quad (2.31)$$

Pela condição de ortogonalidade da decomposição da matriz Q , tem-se

$$\begin{cases} Q_i Q_j^T = 0, & i \neq j \\ Q_i Q_i^T = I. \end{cases} \quad (2.32)$$

Substituindo $B = L_{11}Q_1^T$ na equação (2.24), tem-se

$$\Pi_{B^\perp} = I_j - Q_1 L_{11}^T (L_{11} Q_1^T Q_1 L_{11}^T)^{-1} L_{11} Q_1^T \quad (2.33)$$

$$= I_j - Q_1 Q_1^T \quad (2.34)$$

$$= Q_2 Q_2^T \quad (2.35)$$

Portanto,

$$A \Pi_{B^\perp} = L_{21} Q_1^T Q_2 Q_2^T + L_{22} Q_2^T Q_2 Q_2^T = L_{22} Q_{22}^T, \quad (2.36)$$

provando (2.30). Com este resultado, a prova de (2.29) é imediata. □

O exemplo a seguir mostra como pode ser obtida a projeção ortogonal (A/B) por meio da decomposição LQ das matrizes em blocos de Hankel A e B em um algoritmo em MATLAB®.

Exemplo 2.5.1. Dados os seguintes vetores com distribuição uniforme:

$$a = [0,41 \quad 0,98 \quad 0,30 \quad 0,70 \quad 0,66 \quad 0,53 \quad 0,69 \quad 0,66 \quad 0,17 \quad 0,12 \quad 0,99] e \quad (2.37)$$

$$b = [0,17 \quad 0,03 \quad 0,56 \quad 0,88 \quad 0,66 \quad 0,19 \quad 0,36 \quad 0,46 \quad 0,98 \quad 0,15 \quad 0,85], \quad (2.38)$$

deseja-se montar matrizes A e B em blocos de Hankel e obter a projeção ortogonal de A em B (A/B). Para isto utilizou-se o seguinte algoritmo em MATLAB®:

```
%Programa que calcula a projeção ortogonal de 2 matrizes
N=11;%Número de medidas
m=1;%Número de entradas
a=rand([m N]);%criando vetores aleatórios
b= rand([m N]);%criando vetores aleatórios
maxord=1;%máxima ordem do sistema
nusaida=1;%número de saídas
i =2*(maxord/nusaida);%número de linhas da matriz em blocos de Hankel - empírico
%determinar o número de linhas e colunas dos vetores
[l,na] =size(a);
[m,nb] = size(b);
j = N-2*i+1; %número de colunas da matriz de Hankel
% Criando Matrizes em blocos de Hankel
p=2*1*i;
q=2*m*i;
A=zeros(p,j);%matriz (p x j)
B=zeros(q,j);%matriz (q x j)
for k=1:2*i
    A((k-1)*l+1:k*l, :)=a(:,k:k+j-1);
```

```

    B((k-1)*m+1:k*m, :)=b(:,k:k+j-1);
end
H=[A;B]';%empilhando A e B - Matriz de Hankel empilhada
[Q,R]=qr(H,0);%decomposição QR de H
Q=Q';L=R';%decomposição LQ de H
L11=L(1:q,1:q);
L21=L(q+1:q+p,1:q);
L22=L(q+1:q+p,q+1:q+p);
Q1t=Q(1:p,1:j);
Q2t=Q(p+1:p+q,1:j);
%Projeções ortogonais
%de A em B (A/B):
AB=L21*Q1t
%de A no complemento ortogonal de B (A/Bc):
ABc=L22*Q2t

```

Deve-se ressaltar que os resultados a seguir foram restringidos a duas casas decimais. Dessa forma, o algoritmo acima gerou as seguintes matrizes em blocos de Hankel:

$$A = \begin{bmatrix} 0,41 & 0,98 & 0,30 & 0,70 & 0,66 & 0,53 & 0,69 & 0,66 \\ 0,98 & 0,30 & 0,70 & 0,66 & 0,53 & 0,69 & 0,66 & 0,17 \\ 0,30 & 0,70 & 0,66 & 0,53 & 0,69 & 0,66 & 0,17 & 0,12 \\ 0,70 & 0,66 & 0,53 & 0,69 & 0,66 & 0,17 & 0,12 & 0,99 \end{bmatrix} e, \quad (2.39)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,17 & 0,03 & 0,56 & 0,88 & 0,66 & 0,19 & 0,36 & 0,46 \\ 0,03 & 0,56 & 0,88 & 0,66 & 0,19 & 0,36 & 0,46 & 0,98 \\ 0,56 & 0,88 & 0,66 & 0,19 & 0,36 & 0,46 & 0,98 & 0,15 \\ 0,88 & 0,66 & 0,19 & 0,36 & 0,46 & 0,98 & 0,15 & 0,85 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Portanto, a projeção ortogonal de A em B (A/B) resulta em:

$$A/B = \begin{bmatrix} 0,53 & 0,39 & 0,45 & 0,47 & 0,46 & 0,30 & 0,20 & 0,42 \\ 0,42 & 0,71 & 0,37 & 0,57 & 0,58 & 0,28 & 0,26 & 0,70 \\ 0,49 & 0,63 & 0,33 & 0,57 & 0,48 & 0,67 & 0,82 & 0,17 \\ 0,66 & 0,62 & 0,49 & 0,65 & 0,59 & 0,40 & 0,41 & 0,63 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Como os vetores (2.37) e (2.38) são realizações de uma variável aleatória, era de se esperar que o resultado da projeção ortogonal A/B (2.41) tendesse a zero. Contudo, deve ser notado que tais vetores não possuem média nula. Sendo assim, a projeção A/B (2.41) possui um *offset*. Ao retirar a média destes vetores, obtém-se a seguinte projeção A/B :

$$A/B = \begin{bmatrix} 0,01 & -0,09 & 0,10 & -0,03 & 0,00 & -0,08 & -0,23 & 0,03 \\ -0,31 & -0,01 & 0,00 & -0,20 & -0,05 & -0,11 & -0,07 & 0,45 \\ -0,05 & 0,08 & -0,09 & 0,01 & -0,02 & 0,23 & 0,38 & -0,24 \\ 0,11 & 0,05 & -0,05 & 0,08 & 0,02 & -0,12 & -0,04 & 0,15 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Dessa forma, pode-se concluir que a projeção ortogonal de duas matrizes A e B construídas

por meio de vetores aleatórios de média nula aproxima-se zero ($A/B \simeq 0$). Como é mostrado na Seção 2.6, em um contexto de processos estocásticos, à medida que o número de medições aumenta ($N \rightarrow \infty$) tem-se que $A/B \rightarrow 0$.

□

2.5.2 Projeções Oblíquas

Em vez de decompor as linhas de A como uma combinação linear das linhas de duas matrizes ortogonais entre si, como mostrado na equação (2.27), na projeção oblíqua, decompõe-se a matriz A como uma combinação linear das linhas de duas matrizes não ortogonais B e C , em que a soma dessas matrizes forma um espaço ortogonal, e o complemento ortogonal de B e C , como mostrado em

$$\begin{aligned} A &= L_B B + L_C C + L_{B^\perp} B^\perp + L_{C^\perp} C^\perp \\ &= L_{B, C} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} + L_{B^\perp, C^\perp} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}^\perp. \end{aligned} \quad (2.43)$$

As matrizes $L_B B$ e $L_C C$ são definidas, respectivamente, como a *projeção oblíqua* do espaço linha de A ao longo do espaço linha de C no espaço linha de B e a *projeção oblíqua* do espaço linha de A ao longo do espaço linha de B no espaço linha de C , como se segue:

$$A/_C B \triangleq L_B B, \quad (2.44)$$

$$A/_B C \triangleq L_C C. \quad (2.45)$$

Vale ressaltar que, L_B e L_C são únicas somente quando B e C possuem posto completo e quando a intercessão entre os espaços linha de B e C é nula, ou seja, $\text{posto} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \text{posto}(B) + \text{posto}(C) = q + r$.

Deve ficar claro que a projeção oblíqua projeta o espaço linha de A ortogonalmente no espaço linha formado por B e C , e decompõe o resultado ao longo do espaço linha de B e C . A Figura 2.2 mostra a interpretação geométrica da projeção oblíqua para $j = 3$ e $p = q = r = 1$, em que $A / \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ denota a projeção ortogonal do espaço linha de A ao longo do espaço linha de B e C , $A/_B C$ é a projeção oblíqua de A ao longo de B em C e $A/_C B$ é a projeção oblíqua de A ao longo de C em B .

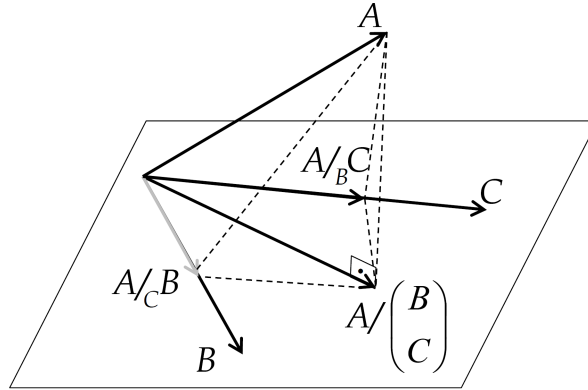


Figura 2.2: Interpretação da projeção oblíqua em um espaço de dimensão $j = 3$.

A álgebra para obter a projeção oblíqua é dada a seguir. Primeiro, considera-se a decomposição LQ do espaço conjunto de A , B e C como em

$$\begin{pmatrix} B \\ C \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Analogamente ao desenvolvimento mostrado na Seção 2.5.1 para se obter (2.29), pode-se mostrar que a representação matricial da projeção ortogonal do espaço linha de A no espaço conjunto de B e C é igual a

$$A/\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{31} & L_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Lema 2.5.2. Analisando Figura 2.2 verifica-se que a projeção ortogonal de A no espaço conjunto de B e C também pode ser descrita por uma combinação linear das linhas de B e C

$$A/\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = A/CB + A/BC \quad (2.48)$$

$$= L_B B + L_C C = \begin{pmatrix} L_B & L_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_B & L_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Igualando-se o lado direito das equações (2.47) e (2.49), tem-se

$$\begin{pmatrix} L_B & L_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{31} & L_{32} \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Portanto, rearranjando (2.50) e pela definição (2.45), tem-se que a projeção oblíqua é dada por

$$A/BC = L_C C = L_{32} L_{22}^{-1} \begin{pmatrix} L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Corolário 2.5.1. Projeções oblíquas

A projeção oblíqua do espaço linha de $A \in \mathbb{R}^{p \times j}$ ao longo do espaço linha de $B \in \mathbb{R}^{q \times j}$ no espaço linha de $C \in \mathbb{R}^{r \times j}$ também pode ser dada por

$$A/B C = [A/B^\perp] [C/B^\perp]^\dagger C. \quad (2.52)$$

Demonstração. (Barreto (2002))

Pode-se escrever que

$$A/B C/B^\perp = A/B^\perp. \quad (2.53)$$

Do mesmo modo, tem-se que

$$A/B^\perp = \alpha [C/B^\perp], \quad (2.54)$$

donde:

$$\alpha = [A/B^\perp] [C/B^\perp]^\dagger, \quad (2.55)$$

das equações (2.53) e (2.54), tem-se

$$\alpha [C/B^\perp] = A/B C/B^\perp.$$

Logo

$$\alpha [C] = A/B C. \quad (2.56)$$

Substituindo-se a equação (2.55) em (2.56), obtém-se:

$$A/B C = [A/B^\perp] [C/B^\perp]^\dagger C.$$

□

Para ilustrar esta demonstração apresenta-se a Figura 2.3 para $p = q = r = 1$ e $j = 2$.

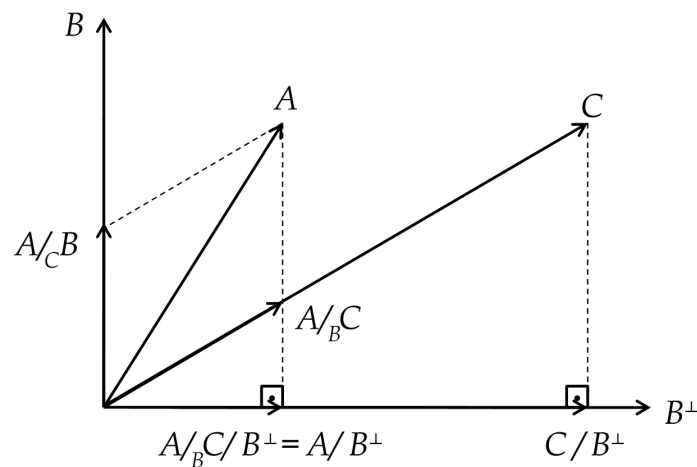


Figura 2.3: Interpretação da projeção oblíqua em um espaço de dimensão $j = 2$.

Deve ser notado que quando $B = 0$ ou $BC^T = 0$ (o espaço linha de B é ortogonal ao espaço linha de C), a projeção oblíqua torna-se uma projeção ortogonal, ou seja, $A/BC = A/C$.

2.6 Ferramentas Estatísticas

Nesta seção, serão apresentadas algumas propriedades estatísticas que estão diretamente relacionadas com algumas ferramentas geométricas apresentadas na Seção 2.5 (Van Overschee e De Moor (1992); Picci (1996); Peternell (1996)). Tais propriedades mostram o motivo pelo qual os algoritmos de identificação por subespaços funcionam bem para grandes conjuntos de dados.

Considere as seguintes sequências: $a_k \in \mathbb{R}^{n_a}$ e $e_k \in \mathbb{R}^{n_e}$, $k = 0, 1, \dots, j$. Considere ainda que a sequência e_k possui média nula e é decorrelacionada de a_k , ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[e_k] &= 0_{n_e \times 1}, \\ \mathbf{E}[a_k e_k^T] &= 0_{n_a \times n_e}. \end{aligned}$$

Na identificação por subespaços assume-se ergodicidade⁴ e considera-se que exista um grande número de dados ($j \rightarrow \infty$). Dessa forma, pode-se substituir o operador esperança \mathbf{E} (média ao longo de um número infinito de experimentos) pelo operador \mathbf{E}_j (média ao longo de um experimento suficientemente longo). Então, pela equação da correlação entre as variáveis, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[a_k e_k^T] &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{j} \sum_{i=0}^j a_i e_i^T \right] \\ &= \mathbf{E}_j \left[\sum_{i=0}^j a_i e_i^T \right], \end{aligned}$$

o que leva a seguinte definição:

$$\mathbf{E}_j[\bullet] \triangleq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j}[\bullet].$$

Considerando agora que a_k seja uma sequência de entradas u_k e e_k seja uma sequência de ruído e assumindo que exista um número de medições suficientemente grande, que os dados são ergódicos e que u_k e e_k são decorrelacionados, verifica-se que:

$$\mathbf{E}_j \left[\sum_{i=0}^j u_i e_i^T \right] = 0. \quad (2.57)$$

Colocando esses dados em matrizes bloco linha e considerando que $\dim(u_k) = \dim(e_k)$, tem-se:

⁴Considera-se que esperança matemática pode ser substituída pela média temporal.

$$\begin{aligned} u &\triangleq (u_0 \ u_1 \ \cdots \ u_j), \\ e &\triangleq (e_0 \ e_1 \ \cdots \ e_j), \end{aligned}$$

por analogia com (2.57), obtém-se:

$$\mathbf{E}_j[ue^T] = 0. \quad (2.58)$$

Isso implica que o vetor de entradas u é perpendicular ao vetor de ruído e . Portanto, pode-se afirmar que para um número suficiente de medições ($j \rightarrow \infty$), não há projeção do espaço linha de e no espaço linha de u . Em outras palavras, o ruído não afeta a entrada. A equação abaixo resume o que foi dito:

$$\mathbf{E}_j[\|e/u\|] = 0. \quad (2.59)$$

A equação (2.59) é ilustrada numericamente na Figura 2.4.

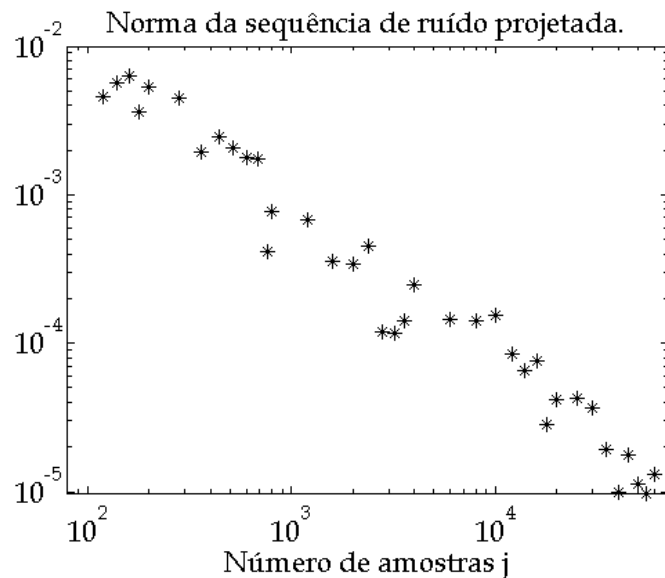


Figura 2.4: Estudo da redução do efeito do ruído adicionado a dados de entrada de um sistema com o aumento do número de amostras. Estimativa da esperança matemática da norma da projeção ortogonal da sequência de ruído na entrada ($\mathbf{E}_j[\|e/u\|]$), em que e e u são vetores com j amostras. Esta figura foi gerada, com j variando de 100 até 60.000, intercalado propriamente, utilizando-se a metodologia descrita no exemplo 2.5.1, para vetores aleatórios (e e u) com média nula e desvio padrão unitário.

Como pode se verificar à medida que j aumenta a média da norma euclidiana da projeção e/u tende a zero. Por isso, na maioria dos algoritmos de identificação, quanto maior o número de dados menor é a influência do ruído de processo na modelagem.

Defini-se a covariância entre duas matrizes $A \in \mathbb{R}^{p \times j}$ e $B \in \mathbb{R}^{q \times j}$ como:

$$\Phi_{[A,B]} \triangleq \mathbf{E}_j[AB^T].$$

Deve-se ressaltar que, neste documento, as notações para operações geométricas determinísticas e estocásticas serão iguais. Para exemplificar esta afirmação considere que $\Phi_{[A,B]}$ possa ser aproximada por:

$$\Phi_{[A,B]} \simeq \frac{1}{j}AB^T, \text{ para } j \rightarrow \infty$$

Portanto, a projeção ortogonal pode-ser representada por:

$$\begin{aligned} A/B &= \Phi_{[A,B]}\Phi_{[B,B]}^\dagger B, \\ &= \left[\frac{1}{j}AB^T\right]\left[\frac{1}{j}BB^T\right]^\dagger B, \\ &= [AB^T][BB^T]^\dagger B, \end{aligned}$$

que é exatamente a mesma definição para projeção ortogonal de matrizes determinísticas. Em [Van Overschee e De Moor \(1996\)](#)[pp.28] mostra-se que a projeção oblíqua de matrizes corrompidas com ruído é igual a projeção oblíqua determinística.

2.7 Índices de Qualidade

Quando se deseja investigar, dentre uma família de modelos, quais os modelos são mais apropriados para um certo objetivo, muitas vezes o usuário lança mão de índices para quantificar a qualidade dos ajustes desses modelos aos dados experimentais do sistema. Um dos indicadores mais utilizados em identificação por subespaços são o índice RMSE e o VAF, que são definidos, respectivamente, como

$$RMSE = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k))^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (y(k) - \bar{y})^2}}, \quad (2.60)$$

$$VAF(\%) = \left(1 - \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \|y(k) - \hat{y}(k)\|_2^2}{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \|y(k)\|_2^2}\right) \times 100, \quad (2.61)$$

em que $\hat{y}(k)$ são os dados obtidos pelo modelo estimado e \bar{y} é o valor médio do sinal medido $y(k)$, para cada saída. Para fins de análise, quanto menor for o valor do RMSE, maior será a eficiência do modelo na recuperação das características dinâmicas do sistema. Por outro lado, no índice VAF, quanto mais próximo de 100%, mais próximos estão o sinal medido y e o sinal estimado \hat{y} .

2.8 Considerações Finais

Neste capítulo, mostrou-se um resumo das ferramentas necessárias para se trabalhar com a identificação por subespaços. Foram discutidos temas com formulação dos modelos em espaço de estados, ideias básicas dos métodos de subespaços e suas principais diferenças em relação aos métodos de identificação tradicionais. Por meio de exemplos e demonstrações intuitivas, buscou-se simplificar o entendimento de conceitos como a montagem de matrizes em blocos de Hankel e projeções geométricas. Além disso, foram apresentadas algumas definições a respeito de processos estocásticos. Dessa forma, espera-se que a abordagem aqui mencionada sirva de auxílio para o entendimento de algumas propriedades que serão apresentadas nos capítulos posteriores. Para maiores detalhes sobre o que foi exposto no presente capítulo, sugere-se a consulta das referências de [Van Overschee e De Moor \(1996\)](#) e [Katayama \(2005\)](#).

Identificação Determinística

“Se quiser por à prova o caráter de um homem, dê-lhe poder.”

Abraham Lincoln

3.1 Introdução

Neste capítulo, será apresentado o método de identificação para sistemas determinísticos. O desenvolvimento deste capítulo é baseado nos trabalhos de (Van Overschee e De Moor (1996); De Cock e De Moor (2003); Katayama (2005)). No caso de sistema determinísticos, o ruído de processo w_k e o ruído de medição v_k , mostrados nas equações (2.1) e (2.2), são considerados iguais a zero. Portanto, as equações de estado têm a seguinte representação:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (3.1)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k. \quad (3.2)$$

Na próxima seção, por meio das equações (3.1) e (3.2), serão derivadas equações matriciais de entrada-saída que são fundamentais para o desenvolvimento da teoria de identificação por subespaços.

3.2 Equações Matriciais de Dados de Entrada-Saída

O problema de identificação requer que, por meio de dados de entrada e saída, encontrem-se as matrizes que compõem as equações (3.1) e (3.2). Para tanto, considere o Lema 3.2.1.

Lema 3.2.1. As equações (3.1) e (3.2) equações podem ser rearranjadas e, após algumas substituições, colocadas como apresentado a seguir:

$$Y_p = \Gamma_i X_p + H_i^d U_p, \quad (3.3)$$

$$Y_f = \Gamma_i X_f + H_i^d U_f, \quad (3.4)$$

$$X_f = A^i X_p + \Delta_i^d U_p. \quad (3.5)$$

As equações de saídas (3.3) e (3.4), de forma similar, são definidas como uma combinação linear de estados passados multiplicados pela matriz de observabilidade estendida Γ_\bullet (resposta dos estados à entrada nula) e a combinação linear das entradas passadas multiplicadas por sua

resposta ao impulso H_{\bullet}^d . A equação (3.5) relaciona os estados futuros com os estados passados sob a influência das entradas.

Demonstração. Ver Apêndice B, Seção B.1. □

A interpretação geométrica da equação matricial (3.4) é mostrada na Figura 3.1.

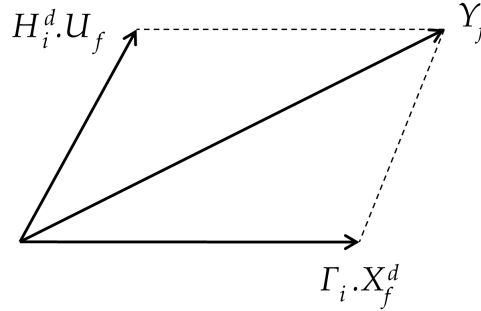


Figura 3.1: Vetores no espaço linha da matriz em blocos de Hankel Y_f são obtidos como combinações lineares de vetores no espaço linha das sequências de estado X_f e vetores no espaço linha da matriz em blocos de Hankel U_f .

3.3 Estimando os Subespaços

Assumindo a suficiência dos subespaços formados por Y_p , Y_f , U_p e U_f no modelo de equações matriciais de dados entrada-saída (3.3), (3.4) e (3.5), apresentados na Seção 3.2. Agora, será tratado o problema de estimação dos subespaços da matriz de observabilidade estendida Γ_i e da sequência de estados da matriz X_f por meio de dados de entrada-saída. Um dos passos principais para essa estimação envolve a determinação da ordem n do sistema. Vale ressaltar que, para obter Γ_i e X_f somente o termo $\Gamma_i X_f$ é necessário. A estimação de $\Gamma_i X_f$, pode ser obtida por meio da projeção oblíqua de dados de entrada-saída do sistema. O termo $\Gamma_i X_f$ é usualmente denotado como

$$O_i = \Gamma_i X_f, \quad (3.6)$$

e pode ser particionando nos subespaços requeridos por meio da decomposição em valores singulares.

3.4 Particionando O_i Determinística

Separar O_i em Γ_i e X_f para sistemas puramente determinísticos é uma tarefa simples. O posto de O_i é igual à ordem n do sistema e, Γ_i e X_f podem ser recuperados de forma precisa pela SVD, como

$$O_i = USV^T = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

em que S_1 é uma submatriz de S contendo os valores singulares não-nulos de O_i e, U_1 e V_1^T são as partes correspondentes de U e V^T . As matrizes requeridas podem ser obtidas como

$$\Gamma_i = U_1 S_1^{1/2}, \quad X_f = S_1^{1/2} V_1^T. \quad (3.8)$$

em que a raiz quadrada de S_1 é simples de ser obtida, pois S_1 é uma matriz diagonal (ver Apêndice A, Seção A.3.1).

3.5 Identificação para Sistemas Autônomos

Um caso especial da identificação por subespaços determinística será apresentado nesta seção. Vale ressaltar que para sistemas autônomos não é necessário realizar a projeção oblíqua. Pois, nesse caso, considera-se $O_i = Y_p = \Gamma_i X_p$ (Verhaegen e Verdult, 2007). A importância de se tratar este caso especial de identificação é que ele permite explicar algumas operações básicas de uma série de esquemas de identificação por subespaços. O passo essencial para realizar essa modelagem é utilizar a equação de dados (3.3) para estimar o espaço coluna da matriz de observabilidade estendida Γ_i . A partir desse subespaço pode-se estimar as matrizes A e C a uma transformação de similaridade. Deve se destacar que o método de identificação por subespaços para sistemas autônomos é muito semelhante ao algoritmo de realização proposto por Ho-Kalman em 1966; ver (Ho e Kalman, 1966). Dessa forma, para um sistema autônomo, as matrizes B e D são iguais a zero e, portanto, a equação de dados (3.3) reduz-se a

$$Y_p = \Gamma_i X_p. \quad (3.9)$$

Essa última equação mostra que cada coluna da matriz Y_p é uma combinação linear das colunas da matriz Γ_i . Isto significa que o espaço coluna da matriz Y_p está contido no espaço coluna de Γ_i , ou seja, $\text{range}(Y_p) \subseteq \text{range}(\Gamma_i)$. Vale mencionar que não se pode concluir, a partir da equação (3.9), que os espaços coluna de Y_p e Γ_i são iguais, pois as combinações lineares das colunas de Γ_i podem ser, tais que, o posto de Y_p é menor do que o posto de Γ_i . No entanto, se $i > n$ e $j \geq i$, pode-se mostrar que, sob determinadas condições, os espaços coluna de Y_p e Γ_i são iguais. Para ver isso, deve se observar que a matriz X_p pode ser escrita como

$$X_p = \begin{bmatrix} x(0) & Ax(0) & A^2x(0) & \cdots & A^{j-1}x(0) \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Se o par $(A, x(0))$ é alcançável, a matriz X_p tem posto linha completo, que é igual a n . Como o sistema é considerado ser mínimo, tem-se que $\text{posto}(\Gamma_i) = n$. Aplicando a desigualdade de Sylvester (ver apêndice A) na equação (3.9) verifica-se que $\text{posto}(Y_p) = n$, portanto, $\text{range}(Y_p) = \text{range}(\Gamma_i)$.

A SVD da matriz Y_p também permite determinar o espaço coluna de Y_p (ver apêndice A). Além disso, como o espaço coluna de Y_p é igual ao de Γ_i , ele pode ser usado para determinar as matrizes A e C do sistema a uma transformação de similaridade T desconhecida. No presente trabalho considera-se $A = T^{-1}\bar{A}T$, $B = T^{-1}\bar{B}$, $C = \bar{C}T$ e $D = \bar{D}$. Denotando a SVD de Y_p por

$$Y_p = U_1 S_1 V_1^T, \quad (3.11)$$

com $S_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Então, das equações (2.18) e (3.8), $U_1 S_1^{1/2}$ pode ser denotado por:

$$U_1 S_1^{1/2} = \Gamma_i = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Portanto, a matriz C é igual às primeiras l linhas de $U_1 S_1^{1/2}$, ou seja, $C = U_1 S_1^{1/2}(1 : l, :)$ (utilizando a notação do MATLAB). A matriz A é calculada resolvendo-se a seguinte equação sobredeterminada, que devido à condição $i > n$ tem solução única:

$$\underline{U_1 S_1^{1/2}} A = \overline{U_1 S_1^{1/2}} \therefore A = (\underline{U_1 S_1^{1/2}})^{\dagger} \overline{U_1 S_1^{1/2}} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (3.13)$$

em que $\underline{U_1 S_1^{1/2}} \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times n}$ é $U_1 S_1^{1/2}$ sem o último bloco linha e $\overline{U_1 S_1^{1/2}} \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times n}$ é $U_1 S_1^{1/2}$ sem o primeiro bloco linha.

3.6 Uso de Sequências Específicas

Sabe-se que, em identificação de sistemas o sinal de entrada deve ser suficientemente ativo de modo que excite a dinâmica do sistema (Aguirre (2007)). O conceito de persistência de excitação (PE) permite quantificar quão ativo é um sinal e, assim, quão adequado é para identificação de sistemas. Considera-se que uma sequência u_k corresponda a um processo estocástico estacionário no sentido amplo e que ela seja ergódica. Pode-se definir excitação persistente como se segue.

Definição 3.6.1. Persistência de excitação (Aguirre, 2007)[pp. 206-209].

Uma sequência de entradas $u_k \in \mathbb{R}^m$ é persistentemente excitante de ordem $2i$ se a sua matriz de covariância

$$R^{uu} \triangleq \Phi_{[U_{0|2i-1}, U_{0|2i-1}]} \quad (3.14)$$

tiver posto completo, o qual é $2mi$.

O Teorema 3.6.1 visa facilitar o entendimento de como extrair os estados por meio das projeções ortogonais e oblíquas dos dados medidos de um processo. Vale destacar que obtidos os estados, como dito anteriormente, o problema de identificação se resume ao método de mínimos quadrados para se obter as matrizes do sistema. Logo após, será apresentada a demonstração comentada do teorema de identificação determinística. Contudo, antes de enunciar o teorema deve-se fazer as próximas três considerações:

Consideração 3.6.1. A entrada u_k é persistentemente excitante de ordem $2i$.

Consideração 3.6.2. A interseção do espaço linha de U_f (entradas futuras) e o espaço linha de X_p é vazia.

Consideração 3.6.3. As matrizes de ponderação definidas pelo usuário $W_1 \in \mathbb{R}^{l_i \times l_i}$ e $W_2 \in \mathbb{R}^{j \times j}$ são tais que W_1 tem posto completo e W_2 obedece a: $\text{posto}(W_p) = \text{posto}(W_p W_2)$, em que W_p é uma matriz em blocos de Hankel que contém as entradas e saídas passadas; ver (2.14). Deve-se destacar que W_1 e W_2 determinam a base no espaço de estados em que o modelo será identificado.

Teorema 3.6.1. Identificação determinística (Van Overschee e De Moor, 1996)

Definindo-se a matriz O_i como a projeção oblíqua do espaço linha de Y_f sobre o espaço linha de W_p ao longo do espaço linha de U_f :

$$O_i \triangleq Y_f /_{U_f} W_p, \quad (3.15)$$

e a decomposição em valores singulares:

$$W_1 O_i W_2 = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$= U_1 S_1 V_1^T, \quad (3.17)$$

então, tem-se que:

1. A matriz O_i é igual ao produto da matriz de observabilidade estendida pela matriz de estados futuros:

$$O_i = \Gamma_i X_f. \quad (3.18)$$

2. A ordem do sistema dado pelas equações (3.1) e (3.2) é igual ao número de valores singulares presentes na equação (3.16) que sejam diferentes de zero.

3. A matriz de observabilidade estendida Γ_i é igual a:

$$\Gamma_i = W_1^{-1} U_1 S_1^{1/2} T. \quad (3.19)$$

em que, $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma transformação de similaridade arbitrária e não singular.

4. A parte das sequências de estados X_f , que se encontra no espaço colunas de W_2 , pode ser recuperada a partir de:

$$X_f W_2 = T^{-1} S_1^{1/2} V_1^T. \quad (3.20)$$

5. A sequência de estados X_f é igual a:

$$X_f = \Gamma_i^\dagger O_i. \quad (3.21)$$

Demonstração. Ver apêndice B, Seção B.2. □

De forma similar ao Corolário 2.5.1 apresenta-se a interpretação geométrica da equação (3.15) (ver também (B.33)) na Figura 3.2.

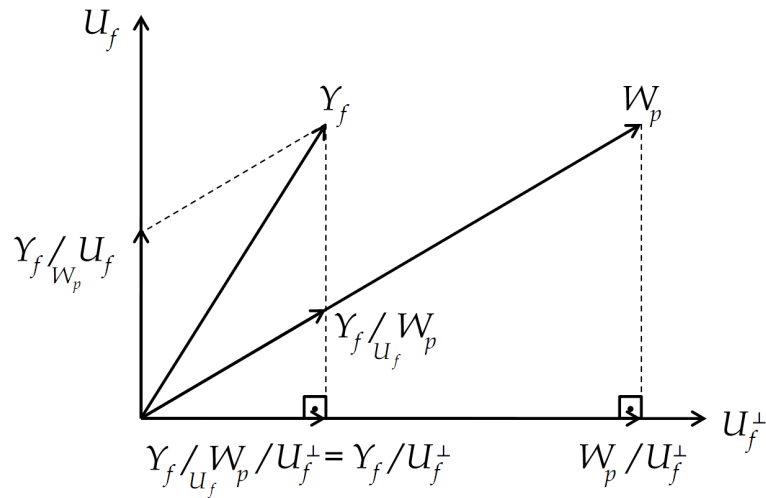


Figura 3.2: Interpretação da projeção oblíqua de dados em um espaço de dimensão $j = 2$.

O Teorema 3.6.1 pode ser sintetizado como:

$\begin{aligned} \text{posto } (Y_f/U_f W_p) &= n \\ \text{espaço linha } (Y_f/U_f W_p) &= \text{espaço linha } (X_f) \\ \text{espaço coluna } (Y_f/U_f W_p) &= \text{espaço coluna } (\Gamma_i) \end{aligned}$

Como mostrado acima, os dados das entradas e saídas passadas e futuras formam uma base pela qual podem ser obtidas as sequências de estado X_f e a matriz de observabilidade estendida Γ_i . Deve-se ressaltar que os métodos apresentados até aqui são para sistemas invariantes no tempo. Portanto, as sequências de estados X_{i+1} e a matriz de observabilidade estendida Γ_{i-1} podem ser obtidas de maneira análoga à exposta no Teorema 3.6.1.

O Exemplo 3.6.1, a seguir, mostra que para sistemas determinísticos a determinação da ordem \hat{n} do sistema é uma tarefa trivial. Entretanto, ao se adicionar ruído, esta tarefa torna-se bem complicada, sendo um tanto quanto subjetiva.

Exemplo 3.6.1. Considere o circuito elétrico RLC da Figura 3.3. Este circuito consiste de um resistor (R), um capacitor (C) e um indutor (L). A entrada u é uma fonte de tensão e, a tensão em cima do indutor L é escolhida como a saída y .

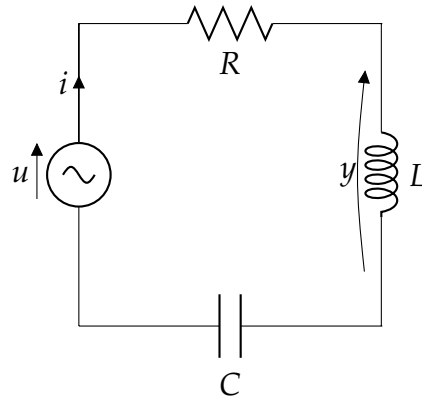


Figura 3.3: Circuito RLC série.

A tensão no capacitor e a corrente no indutor foram escolhidas como as variáveis de estado x_1 e x_2 , respectivamente. A representação em espaço de estados, em tempo contínuo, do sistema da Figura 3.3 é apresentado nas equações (3.22) e (3.23).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1/L \end{bmatrix} u. \quad (3.22)$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u. \quad (3.23)$$

Escolhendo-se $R = 10\Omega$, $C = 0,02F$ e $L = 20H$ e discretizando o sistema (3.22)-(3.23) com $T_s = 0,1s$, tem-se

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9877 & 4,8568 \\ -0,0049 & 0,9392 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0123 \\ 0,0049 \end{bmatrix} u_k, \quad (3.24)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} -1 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + u_k. \quad (3.25)$$

Escolheu-se como entrada u_k de (3.24)-(3.25) um sinal de tensão, que se trata de uma sequência de ruído branco com média nula e desvio padrão $\sigma \approx 20$. A entrada u_k , persistentemente excitante, e a saída y_k , resultante desta excitação, são apresentadas na Figura 3.4.

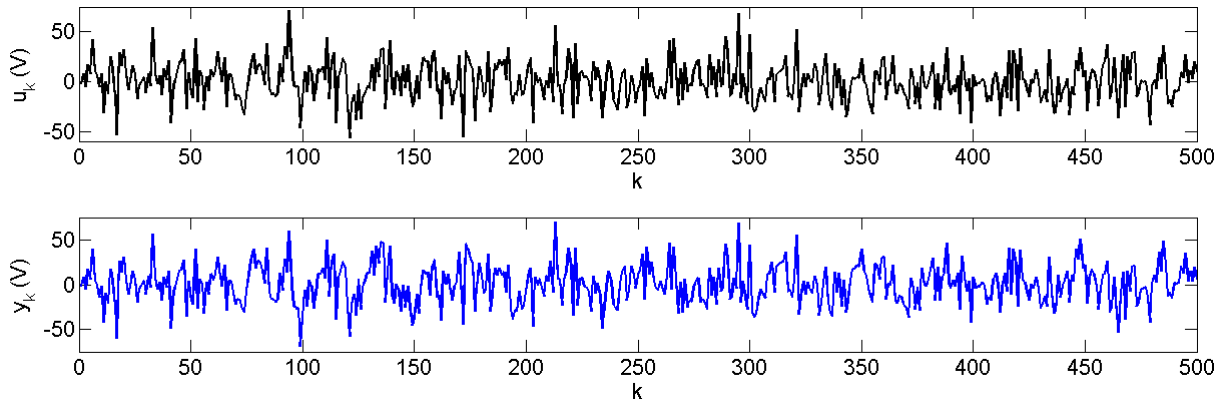


Figura 3.4: Sinais de entrada (u_k) e saída (y_k), em volts, do circuito RLC.

Deseja-se testar a aplicabilidade do método MOESP para os casos nos quais há ruído nos dados. Dessa forma, adicionou-se sequências de ruído branco v_k a saída y_k , formando dados com quatro relações sinal ruído (SNR) diferentes. Para cada um desses dados corrompidos com ruído, obteve-se uma matriz de projeção oblíqua O_i e aplicou-se a SVD nesta matriz. A Figura 3.5 mostra os valores singulares da projeção oblíqua O_i para cada um dos dados corrompidos com ruído. A medida que a SNR diminui, os valores singulares mais significativos de O_i tornam-se, praticamente, indistinguíveis na determinação da ordem \hat{n} do sistema. Claramente, o melhor caso na determinação da ordem do sistema é quando $SNR = 20$.

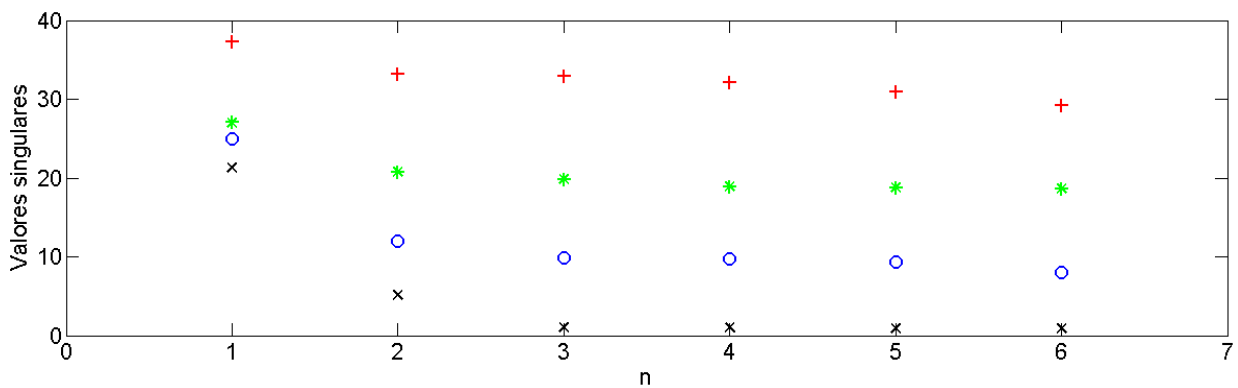


Figura 3.5: Valores singulares da matriz O_i para ruído branco adicionado à saída para diferentes valores de relação sinal ruído (SNR). (x) $SNR = 20$, (o) $SNR = 2$, (*) $SNR = 1$ e (+) $SNR = 0,67$.

Este exemplo ilustra que, de fato, para relações sinal ruído baixas é uma tarefa difícil determinar a ordem de um sistema pela SVD da matriz O_i . No Capítulo 4, será proposta uma forma de reduzir o efeito do ruído adicionado à saída na determinação da ordem \hat{n} do sistema.

□

3.7 Determinação das Matrizes do Sistema

Considerando que a matriz O_i seja conhecida, como mostrado na seção anterior, ela pode ser particionada nos subespaços requeridos pela SVD, coluna(Γ_i) ou linha(X_f). As matrizes do sistema podem ser obtidas a partir qualquer um desses dois subespaços. A Figura 3.6 exemplifica as duas metodologias para obtenção dessas matrizes. O método N4SID utiliza a informação dos estados. Por outro lado, o MOESP utiliza a matriz de observabilidade estendida.

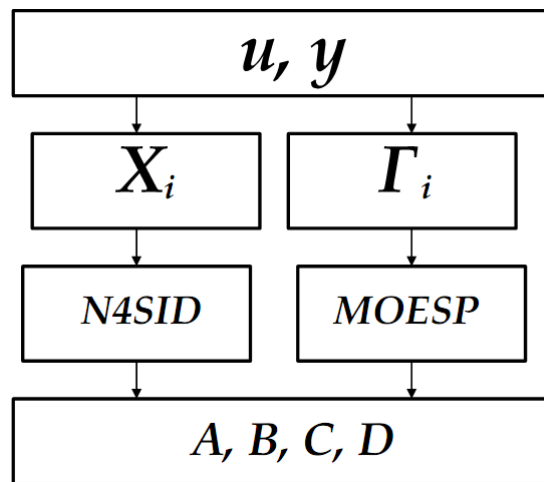


Figura 3.6: Formas distintas de obter as matrizes do sistema para o caso determinístico. À esquerda o método N4SID que utiliza a informação dos estados. À direita o método MOESP que utiliza a matriz de observabilidade estendida.

A seguir são apresentadas as duas metodologias para obtenção dessas matrizes.

3.7.1 Usando a Matriz de Observabilidade coluna(Γ_i)

A matriz Γ_i é obtida como uma base de coluna(Γ_i). Assim, as matrizes A , B , C e D são obtidas em dois passos: Primeiramente, A e C são determinadas a partir de Γ_i ; Posteriormente, de posse das matrizes A e C , B e D são computadas.

Determinando A e C

Como pode-se observar na equação (2.18) da Seção 2.4.3, a matriz C pode ser obtida diretamente a partir do primeiro bloco linha de Γ_i .

A seguir a matriz A é determinada a partir das seguintes estruturas deslocadas de Γ_i :

$$\underline{\Gamma}_i = \begin{pmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{i-2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times n}, \quad (3.26)$$

$$\bar{\Gamma}_i = \begin{pmatrix} CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times n}. \quad (3.27)$$

em que $\underline{\Gamma}_i$ é Γ_i sem o último bloco linha e $\bar{\Gamma}_i$ é Γ_i sem o primeiro bloco linha. Esta estrutura permite a determinação de A , resolvendo-se o seguinte problema de mínimos quadrados linear:

$$\underline{\Gamma}_i A = \bar{\Gamma}_i \therefore A = \underline{\Gamma}_i^\dagger \bar{\Gamma}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (3.28)$$

Determinando B e D

Primeiramente, multiplica-se a equação de entrada-saída (3.4) pela esquerda por Γ_i^\perp e pela direita por U_f^\dagger :

$$\Gamma_i^\perp Y_f U_f^\dagger = \Gamma_i^\perp \Gamma_i X_f U_f^\dagger + \Gamma_i^\perp H_i^d U_f U_f^\dagger, \quad (3.29)$$

em que $\Gamma_i^\perp \in \mathbb{R}^{(li-n) \times li}$ é uma matriz de posto completo que satisfaz $\Gamma_i^\perp \Gamma_i = 0$. Sendo assim, a última equação pode ser simplificada, ficando da seguinte forma:

$$\Gamma_i^\perp Y_f U_f^\dagger = \Gamma_i^\perp H_i^d. \quad (3.30)$$

Para facilitar a notação, é considerado o termo à esquerda da última equação como \mathcal{M} e Γ_i^\perp como \mathcal{L} , então (3.30) torna-se:

$$\left(\mathcal{M}_1 \quad \mathcal{M}_2 \quad \cdots \quad \mathcal{M}_i \right) = \left(\mathcal{L}_1 \quad \mathcal{L}_2 \quad \cdots \quad \mathcal{L}_i \right) \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \cdots & D \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

em que $\mathcal{M}_k \in \mathbb{R}^{(li-n) \times m}$ e $\mathcal{L}_k \in \mathbb{R}^{(li-n) \times l}$. A equação (3.31) pode ser reescrita como:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{M}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 & \cdots & \mathcal{L}_{i-1} & \mathcal{L}_i \\ \mathcal{L}_2 & \mathcal{L}_3 & \cdots & \mathcal{L}_i & 0 \\ \mathcal{L}_3 & \mathcal{L}_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{L}_i & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & \underline{\Gamma}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ B \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

que se trata de um conjunto de equações lineares em que deseja-se encontrar as variáveis B e D . Esse problema é sobredeterminado (quando $i(li-n) \geq (l+n)$) e pode ser resolvido por meio do método de mínimos quadrados.

Procedimento prático para obtenção das matrizes - Método MOESP

A Figura 3.7 traz um diagrama esquemático do procedimento de identificação das matrizes A , B , C e D pelo método MOESP. Primeiramente, dadas as medições dos dados de entradas e saídas de um processo, monta-se as matrizes em blocos de Hankel de entradas e saídas, passadas e futuras. De posse dessas matrizes, realiza-se a projeção oblíqua das saídas futuras Y_f ao longo das entradas futuras U_f nos dados passados formados por W_p . Logo após, por meio da SVD dessa projeção, determina-se a ordem do sistema e a matriz de observabilidade estendida Γ_i . Da matriz Γ_i são estimadas as matrizes A e C . Por fim, por meio dos dados de entrada e saída, da matriz de observabilidade estendida Γ_i e do complemento ortogonal de Γ_i , são estimadas as matrizes B e D pelo método de mínimos quadrados.

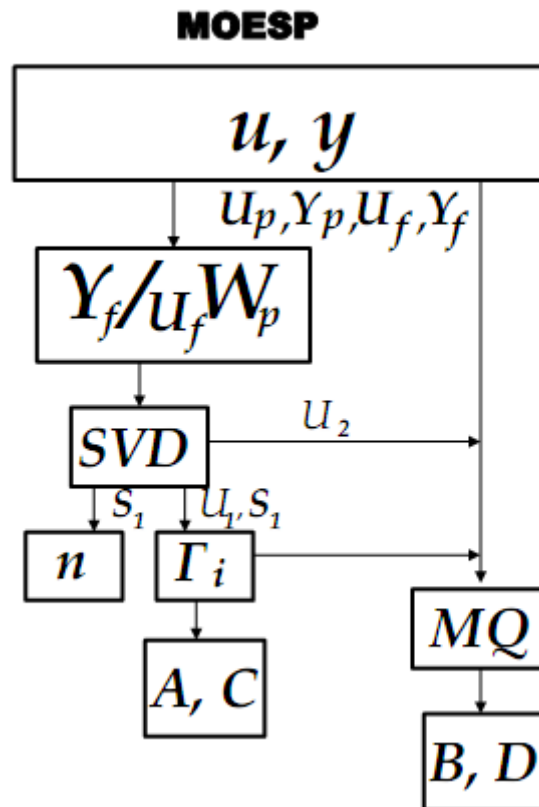


Figura 3.7: Diagrama esquemático do procedimento para identificação por subespaços para o método MOESP.

3.7.2 Usando os Estados linha(X_f)

Considerando que as entradas, as saídas e as seqüências de estados estão disponíveis, elas podem ser colocadas como a seguir:

$$\begin{aligned}\hat{X}_i &= (\hat{x}_i, \dots, \hat{x}_{i+j-1}), & \hat{X}_{i+1} &= (\hat{x}_{i+1}, \dots, \hat{x}_{i+j}), \\ U_i &= (u_i, \dots, u_{i+j-1}), & Y_i &= (y_i, \dots, y_{i+j-1}).\end{aligned}$$

Os dados acima podem ser relacionados pela seguinte equação:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}_i \\ U_i \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Portanto, os parâmetros do modelo (3.1)-(3.2) podem ser estimados pelo método de mínimos quadrados. Denotando:

$$\Theta = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{pmatrix} \hat{X}_i \\ U_i \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_i \end{pmatrix},$$

a solução por mínimos quadrados pode ser obtida como a seguir:

$$\Theta = \mathcal{Y}\mathcal{X}^\dagger = \mathcal{Y}\mathcal{X}^T(\mathcal{X}\mathcal{X}^T)^{-1}. \quad (3.34)$$

Contudo, deve ser notado que como não há ruído, o conjunto de equações acima é consistente e não necessita ser resolvido por mínimos quadrados.

Procedimento prático para obtenção das matrizes - Método N4SID

A Figura 3.7 traz um diagrama esquemático do procedimento de identificação das matrizes A , B , C e D pelo método N4SID. O procedimento para identificação pelo método N4SID é idêntico ao método MOESP até a parte em que a matriz Γ_i e a ordem do sistema são obtidas. A partir daí, também são obtidos os estados X_i . Como os sistemas em que os métodos são aplicados são invariantes no tempo, pode-se lançar mão desta propriedade para obter Γ_{i-1} e os estados X_{i+i} . Deve-se atentar para o fato de que uma nova projeção oblíqua é realizada com os dados deslocados para obter X_{i+i} . Sendo assim, de posse dos dados de entradas e saídas e dos estados X_i e X_{i+i} , pode-se obter as matrizes A , B , C e D pelo método de mínimos quadrados.

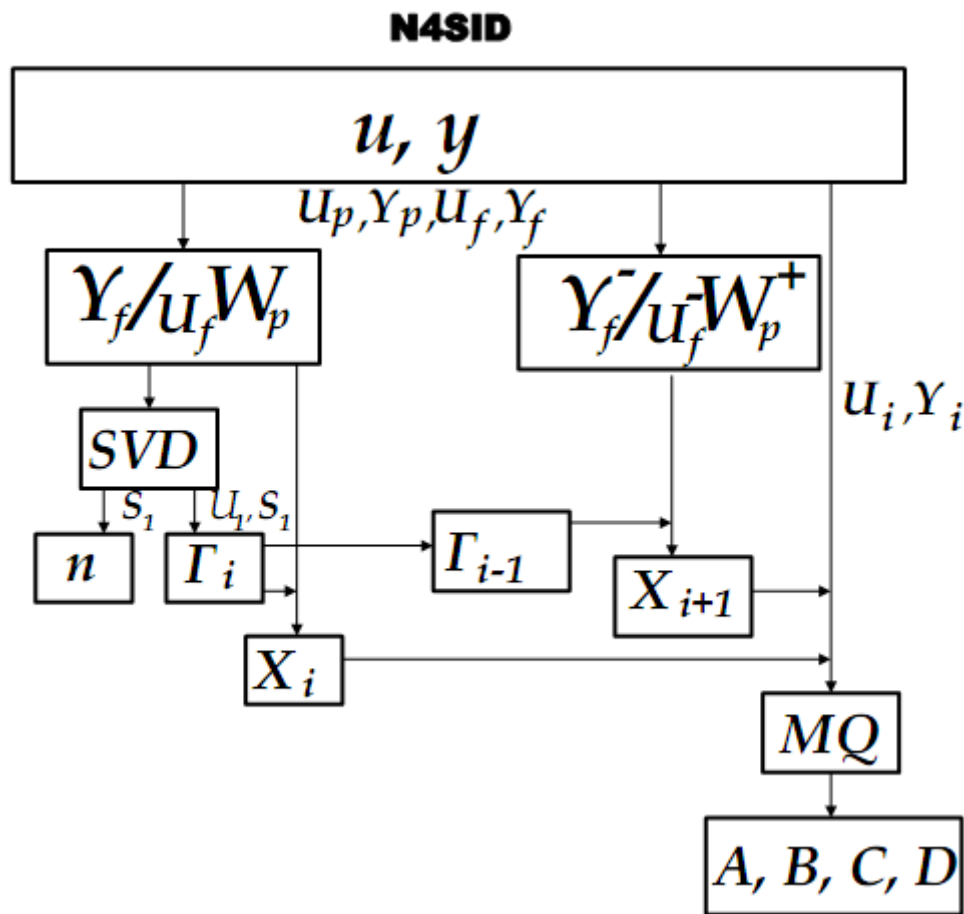


Figura 3.8: Diagrama esquemático do procedimento para identificação por subespaços para o método N4SID.

3.8 A Escolha das Matrizes de Ponderação

Como descrito em [Viberg \(1995\)](#) existem vários algoritmos de identificação por subespaços. Comumente esses algoritmos são divididos em duas classes, como mostrado na Seção 3.7. A primeira classe utiliza-se das estimativas da sequências de estados \hat{X}_i (os vetores singulares à direita de $W_1 O_i W_2$) para encontrar as matrizes do sistema. A segunda classe de algoritmos usa a matriz de observabilidade estendida Γ_i (os vetores singulares à esquerda de $W_1 O_i W_2$) para estimar as matrizes A e C , posteriormente, B e D . Uma outra forma de diferenciar os algoritmos de subespaços se refere à escolha das matrizes de ponderação, W_1 e W_2 . Essas matrizes são escolhidas de forma que W_1 tenha posto completo e W_2 seja, tal que, $\text{posto}(W_p) = \text{posto}(W_p W_2)$. A escolha das matrizes de ponderação para algoritmos do tipo N4SID ([Van Overschee et al., 1997](#)) e MOESP ([Katayama, 2005](#); [Verhaegen e Verdult, 2007](#)) são resumidas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Definições das matrizes de ponderação para os algoritmos N4SID e MOESP.

Algoritmo	W_1	W_2
N4SID	I_{li}	I_j
MOESP	I_{li}	$\Pi_{U_f}^\perp$

O algoritmo N4SID utiliza a estimativas dos estados (X_i). Por outro lado, o algoritmo MOESP utiliza a matriz de observabilidade estendida (Γ_i).

Como motivação para o próximo capítulo, será apresentado no Exemplo 3.8.1 a estimação das matrizes de um sistema, pelo método MOESP, para o caso em que ruído colorido é adicionado na saída de um sistema no qual deseja-se identificar.

Exemplo 3.8.1. Considere o sistema (3.24)-(3.25) apresentado no Exemplo 3.6.1. A fim de testar a robustez do método MOESP quando sujeito à ruído colorido, gerou-se 30 sequências de ruído v_k por meio do filtro a seguir

$$v_k = \frac{q^{-1} + 0,5q^{-2}}{1 - 1,69q^{-1} + 0,96q^{-2}}e_k, \quad (3.35)$$

em que, e_k é uma sequência de ruído branco, qualquer, com média nula e desvio padrão unitário. A estimação das matrizes do sistema pelo método MOESP foi realizada para cada sequência de ruído gerada v_k adicionada à saída y_k . Para cada uma das realizações de ruído v_k , foram geradas 500 amostras de dados de entrada u_k e saída y_k , sendo 400 utilizadas para identificação e 100 para validação. Os autovalores do sistema original são $0,9634 \pm 0,1517i$. A Figura 3.9 mostra os autovalores estimados pelo método MOESP para 30 realizações de ruído diferentes.

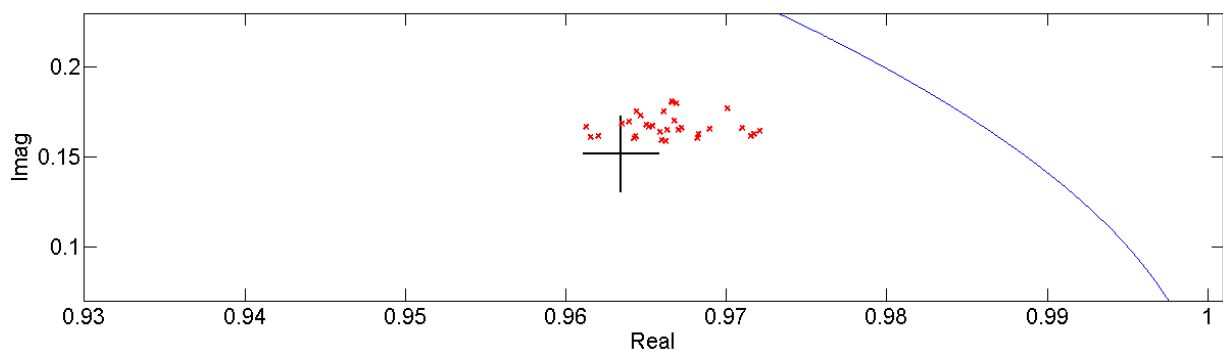


Figura 3.9: Comparação dos autovalores estimados com o autovalor original do circuito RLC. (x) Autovalores da matriz A do circuito RLC estimados pelo método MOESP para 30 realizações de ruído de medição colorido. (+) Autovalor original do sistema.

Como pode ser verificado pela Figura 3.9, o método MOESP produz estimativas polarizadas dos autovalores da matriz A do circuito RLC para ruído colorido adicionada à saída.

□

3.9 Considerações Finais

Neste capítulo foi apresentado o método de identificação por subespaços para sistemas puramente determinísticos. Mostrou-se que o sistema em espaços de estados poderia ser reformulado e colocado em forma de equações matriciais de entrada-saída. A seguir, mostrou-se em qual subespaço as matrizes de sistemas em espaços de estados podem ser recuperadas. Logo após, o teorema da identificação determinística foi apresentado. Na demonstração desse teorema, apresentada na Seção B.2, verificou-se que, pela projeção oblíqua das saídas futuras ao longo das entradas e saídas passadas nas entradas futuras, pode-se extrair a ordem e recuperar os estados do sistema, sem a necessidade de encontrar as matrizes que modelam o mesmo. Mostrou-se também que, conhecendo a matriz de projeção O_i , as matrizes do sistema podem ser obtidas por duas metodologias distintas, a saber: por meio de Γ_i ou X_i . Por fim, foi apresentado em qual base as matrizes de ponderação W_1 e W_2 são escolhidas.

Identificação Estocástica

“Se, pela ofensa de um e por meio de um só, reinou a morte, muito mais os que recebem a abundância da graça e o dom da justiça reinarão em vida por meio de um só, a saber, Jesus Cristo.”

Rm 5:17

4.1 Introdução

Neste capítulo é apresentado o método de identificação por subespaços para sistemas estocásticos. Para elaboração deste capítulo, de certa maneira, seguiram-se as abordagens apresentadas em (Van Overschee e De Moor, 1996; Katayama, 2005; Trnka, 2007; Verhaegen e Verdult, 2007). No problema de identificação estocástica as equações de estado são as mesmas apresentadas na Seção 2.2 que, por questões didáticas, são reescritas a seguir:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k, \quad (4.1)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k + v_k, \quad (4.2)$$

em que os vetores $u_k \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ são as entradas, $x_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ são os estados e $y_k \in \mathbb{R}^{l \times 1}$ são as saídas, $w_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $v_k \in \mathbb{R}^{l \times 1}$ são o ruído de processo e medição, respectivamente, com média nula e matrizes de covariância $E[v_k v_k^T] = Q$, $E[w_k w_k^T] = R$ e $E[v_k w_k^T] = S$. O modelo de processo mostrado nas equações (4.1) e (4.2), também pode ser representado como o modelo de inovação

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Ke_k, \quad (4.3)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k + e_k, \quad (4.4)$$

em que K é o ganho de Kalman em estado estacionário, a inovação $e_k \in \mathbb{R}^{l \times 1}$ é considerada um processo branco, com média nula, independente das entradas e saídas passadas e possui matriz de covariância $E[e_k e_k^T] = R_e$.

4.2 Equações Matriciais de Dados de Entrada-Saída

Seguindo o procedimento de substituições recursivas, semelhante ao caso determinístico mostrado no Apêndice B.1, pode-se representar as equações (4.3) e (4.4) na forma das seguintes

equações matriciais lineares

$$Y_p = \Gamma_i X_p + H_i^d U_p + H_i^s E_p, \quad (4.5)$$

$$Y_f = \Gamma_i X_f + H_i^d U_f + H_i^s E_f, \quad (4.6)$$

$$X_f = A^i X_p + \Delta_i^d U_p + \Delta_i^s E_p. \quad (4.7)$$

As equações de saída (4.5) e (4.6), de forma similar, são definidas como uma combinação linear de estados passados multiplicados pela matriz de observabilidade estendida Γ_\bullet (resposta do sistema à entrada nula) e a combinação linear das entradas passadas e ruído aditivo multiplicadas por suas respectivas respostas ao impulso H_\bullet^d e H_\bullet^s . A equação (4.7) relaciona os estados futuros com os estados passados sob a influência das entradas determinísticas e o ruído aditivo.

4.3 Particionando O_i Estocástica

Diferentemente de quando considera-se O_i determinística, na presença do ruído, tal matriz pode ter de posto completo. Assim, todos os valores singulares de O_i podem ser diferentes de zero, ou seja, a diagonal da matriz S pode não ter somente os valores singulares originais do sistema. Contudo, o posto do sistema a ser identificado pode ser escolhido pelo número de valores singulares mais significativos. Isto pode ser uma tarefa crítica, para a qual poucas orientações teóricas estão disponíveis (Van Der Veen et al., 1993). Na prática, costuma-se comparar a magnitude dos primeiros valores singulares com os demais. Ao detectar uma maior variação na magnitude de um valor singular para o valor seguinte, estima-se a ordem (\hat{n}) do sistema de acordo com o valor singular de maior valor nessa comparação (Verhaegen e Verdult, 2007); ver Exemplo 4.6.1. Escolhendo-se \hat{n} como a ordem do sistema, a SVD da matriz O_i pode ser dividida em uma parte referente ao *signal* e outra ao *ruído*, como se segue

$$O_i = \begin{pmatrix} U_s & U_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_s & 0 \\ 0 & S_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_s^T \\ V_r^T \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

em que U_s e V_s^T contém \hat{n} vetores singulares principais, cujos correspondentes valores singulares são coletados na diagonal $\hat{n} \times \hat{n}$ da matriz S_s . A estimativa *filtrada* da matriz de observabilidade estendida e da matriz de sequências de estado são então

$$\Gamma_i = U_s S_s^{1/2}, \quad X_f = S_s^{1/2} V_s^T. \quad (4.9)$$

4.4 Estimação de O_i por meio dos Dados de Entrada-Saída

Esta seção objetiva dar não somente um embasamento teórico de como a matriz O_i pode ser estimada, mas também traz uma interpretação geométrica de como este subespaço é recuperado para o caso de dados corrompidos com ruído branco. Deve se ressaltar que a demonstração matemática dos conceitos aqui apresentados é demasiadamente longa. Por isso, optou-se por não apresentá-la aqui. Para maiores detalhes sobre tais demonstrações, sugere-se a consulta ao apêndice de (Van Overschee e De Moor, 1996).

Dessa forma, como ponto de partida para recuperar as estimativas de $\Gamma_i \hat{X}_f$, lançando-se mão de conceitos de identificação clássicos, poderia se pensar intuitivamente na estimação de $\Gamma_i \hat{X}_f$ por meio da projeção ortogonal de Y_f no subespaço gerado por W_p e U_f , como a seguir

$$Y_f / \begin{pmatrix} W_p \\ U_f \end{pmatrix} = \Gamma_i \hat{X}_f + H_i^d U_f. \quad (4.10)$$

A projeção ortogonal pode eliminar o termo de ruído E_f se ele for branco. Dessa forma, ele será assintoticamente perpendicular ao subespaço gerado por $\begin{pmatrix} W_p \\ U_f \end{pmatrix}$. Portanto, as estimativas das sequências de estado X_f e das entradas futuras U_f estarão presentes no espaço conjunto de W_p e U_f . Entretanto, o problema de identificação por subespaços não está totalmente resolvido, pois a estimativa dos estados futuros X_f ainda depende do termo de entradas futuras U_f . A Figura 4.1 resume o que foi dito sobre a projeção ortogonal apresentada na equação (4.10).

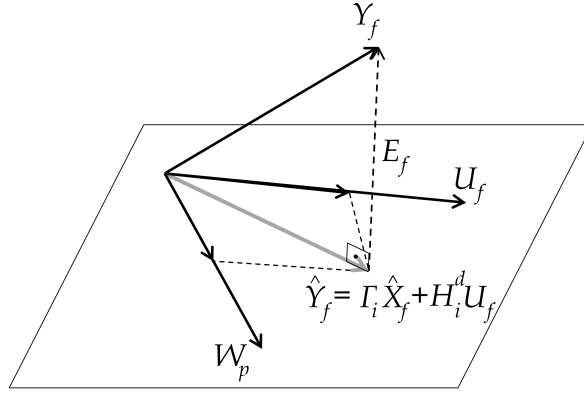


Figura 4.1: Projeção ortogonal nos dados de entrada e saída.

Para mostrar que X_f pertence ao espaço conjunto de W_p e U_f , considere a equação (4.5). Nessa equação, os estados passados X_p podem ser expressados como

$$X_p = -\Gamma_i^+ H_i^d U_p + \Gamma_i^+ Y_p - \Gamma_i^+ H_i^s E_p = \begin{pmatrix} -\Gamma_i^+ H_i^d & \Gamma_i^+ & -\Gamma_i^+ H_i^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_p \\ Y_p \\ E_p \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Substituindo (4.11) em (4.7), tem-se

$$\begin{aligned} X_f &= A^i X_p + \Delta_i^d U_p + \Delta_i^s E_p \\ &= A^i \Gamma_i^+ Y_p - A^i \Gamma_i^+ H_i^d U_p - A^i \Gamma_i^+ H_i^s E_p + \Delta_i^d U_p + \Delta_i^s E_p \\ &= \begin{pmatrix} (\Delta_i^d - A^i \Gamma_i^+ H_i^d) & A^i \Gamma_i^+ & (\Delta_i^s - A^i \Gamma_i^+ H_i^s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_p \\ Y_p \\ E_p \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

As equações (4.11) e (4.12) indicam que ambos estados passados X_p e futuros X_f podem ser obtidos como uma combinação linear dos dados passados Y_p , U_p e E_p .

Para computar a estimativa de X_f o termo de ruído pode ser substituído pelo seu valor médio, dessa forma

$$\hat{X}_f = \begin{pmatrix} (\Delta_i^d - A^i \Gamma_i^+ H_i^d) & A^i \Gamma_i^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_p \\ Y_p \end{pmatrix} = L_w W_p, \quad (4.13)$$

mostrando que \hat{X}_f pertence ao espaço linha de W_p .

Como foi apresentado, a projeção ortogonal elimina o termo de ruído, mas ainda há a influência do termo de entradas futuras U_f , que também precisa ser eliminado, nesse caso a *projeção oblíqua* é a ferramenta correta.

Lema 4.4.1. A projeção oblíqua dos dados de entradas futuras Y_f sobre os dados passados W_p ao longo dos dados de entradas futuras U_f é dado por

$$Y_f /_{U_f} W_p = \Gamma_i \hat{X}_f. \quad (4.14)$$

A Figura 4.2 exemplifica que realizando a projeção oblíqua das saídas futuras Y_f no espaço linha dos dados passados W_p ao longo do espaço linha das entradas futuras U_f , obtém-se exatamente o termo desejado $\Gamma_i \hat{X}_f$.

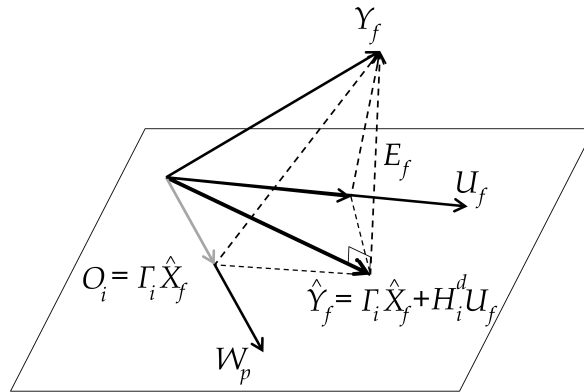


Figura 4.2: Projeção oblíqua nos dados de entrada e saída.

Antes de apresentar a demonstração da projeção oblíqua para recuperar \hat{X}_f e o teorema da identificação estocástica, deve-se levar em conta as seguintes considerações.

Consideração 4.4.1. A entrada determinística u_k é não correlacionada com o ruído de processo w_k e com o ruído de medição v_k .

Consideração 4.4.2. A entrada u_k é persistentemente excitante de ordem $2i$.

Consideração 4.4.3. O número de medidas tende a infinito, $j \rightarrow \infty$.

Consideração 4.4.4. O ruído de processo w_k e o ruído de medição v_k não são identicamente nulos.

Consideração 4.4.5. As matrizes de ponderação definidas pelo usuário W_1 e W_2 são tais que W_1 possui posto completo e W_2 obedece: $\text{posto}(W_p) = \text{posto}(W_p.W_2)$, em que W_p é a matriz em blocos de Hankel que contém as entradas e saídas passadas.

Demonstração. Primeiramente, considere a projeção oblíqua de todos os termos de (4.6), como se segue

$$Y_f/U_f W_p = (\Gamma_i X_f + H_i^d U_f + H_i^s E_f)/U_f W_p, \quad (4.15)$$

$$= \Gamma_i X_f/U_f W_p + H_i^d U_f/U_f W_p + H_i^s E_f/U_f W_p. \quad (4.16)$$

Analisando cada termo de (4.16) separadamente e levando em conta as considerações de 4.4.1 a 4.4.4:

- Para o número de dados passados (linhas) e de amostras tendendo ao infinito ($i, j \rightarrow \infty$)

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} X_f/U_f W_p = \lim_{i, j \rightarrow \infty} X_f/W_p = \hat{X}_f, \quad (4.17)$$

pois como foi mostrado, \hat{X}_f (4.13) e X_f (4.12) são estimados no espaço conjunto de W_p .

- Pela definição de projeção oblíqua pode se verificar que

$$U_f/U_f W_p = 0. \quad (4.18)$$

- Para o número de amostras tendendo ao infinito e pela independência do ruído, tem-se que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E_f/U_f W_p = 0. \quad (4.19)$$

Dessa forma, pode-se concluir que

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} Y_f/U_f W_p = \Gamma_i \hat{X}_f. \quad (4.20)$$

□

Todas as projeções supracitas na última demonstração são exatas quando o número de dados tende ao infinito ($i, j \rightarrow \infty$). O efeito das projeções ortogonal e oblíqua, são resumidos a seguir

$$\begin{aligned} Y_f &= \Gamma_i X_f + H_i^d U_f + H_i^s E_f, \\ Y_f / \begin{pmatrix} W_p \\ U_f \end{pmatrix} &= \Gamma_i \hat{X}_f + H_i^d U_f, \\ Y_f/U_f W_p &= \Gamma_i \hat{X}_f. \end{aligned}$$

De posse desses resultados, pode-se enunciar o teorema da identificação estocástica.

Teorema 4.4.1. (Van Overschee e De Moor, 1996)

Com dito anteriormente O_i é definido como projeção oblíqua. A decomposição em valores singulares da projeção oblíqua ponderada é dada por:

$$W_1 O_i W_2 = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Portanto:

1. A matriz O_i é igual ao produto da matriz de observabilidade estendida e a sequência de estados X_i :

$$O_i = \Gamma_i \cdot \hat{X}_i. \quad (4.22)$$

2. A ordem do sistema (4.3)-(4.4) é igual ao número de valores singulares diferentes de zero em 4.21, na prática, utiliza-se o procedimento empírico descrito na Seção 4.3.

3. A matriz de observabilidade estendida Γ_i é igual a:

$$\Gamma_i = W_1^{-1} U_1 S_1^{1/2} \quad (4.23)$$

4. Parte da sequência de estados X_i , que se situam no espaço da coluna de W_2 podem ser recuperados a partir de:

$$\hat{X}_i W_2 = T_i^{-1} S_1^{1/2} V_1^T \quad (4.24)$$

5. A sequência de estados \hat{X}_i é igual a:

$$\hat{X}_i = \Gamma_i^+ O_i \quad (4.25)$$

No caso estocástico a escolha das matrizes de ponderação W_1 e W_2 para os algoritmos N4SID e MOESP é idêntica ao caso determinístico apresentado na Tabela 3.1. O Teorema 4.4.1 pode ser sintetizado como:

$\begin{aligned} \text{posto } (Y_f/u_f W_p) &= n \\ \text{espaço linha } (Y_f/u_f W_p) &= \text{espaço linha } (X_f) \\ \text{espaço coluna } (Y_f/u_f W_p) &= \text{espaço coluna } (\Gamma_i) \end{aligned}$

4.5 Determinação das Matrizes do Sistema

Como mostrado na Seção 3.7, considerando que a matriz O_i seja conhecida, ela pode ser particionada em dois subespaços, coluna(Γ_i) e linha(X_i), pela SVD. Dessa forma, as matrizes do sistema podem ser obtidas por qualquer um destes dois subespaços. Deve ser notado, na presente seção, que o ruído branco aditivo de processo e medição será tratado, diferentemente do caso apresentado na Seção 3.7. Entretanto, como deve estar claro, a metodologia para sistemas determinísticos e estocásticos são, exceto pelo tratamento ou estimação do termo de

ruído, idênticas. Na Figura 4.3 é mostrada as duas metodologias para obtenção das matrizes do sistema e os respectivos algoritmos utilizados por cada uma delas.

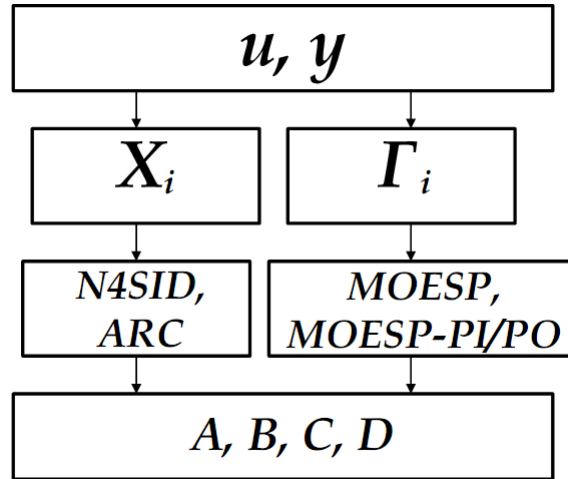


Figura 4.3: Formas distintas de obter as matrizes do sistema para o caso estocástico. À esquerda os métodos N4SID e ARC que utilizam a informação dos estados. À direita os métodos MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO que utilizam a matriz de observabilidade estendida.

4.5.1 Usando a Matriz de Observabilidade coluna(Γ_i)

Como no caso determinístico, a matriz Γ_i é obtida como uma base de coluna(Γ_i). Assim, as matrizes A , B , C e D também são obtidas em dois passos. Em primeiro lugar A e C são determinadas a partir de Γ_i . Logo após, de posse das matrizes A e C , as matrizes B e D são determinadas.

Determinando A e C

Como mostrado na Seção 3.7.1, a matriz C pode ser obtida diretamente a partir do primeiro bloco linha de Γ_i e a matriz A é obtida resolvendo-se o seguinte problema de mínimos quadrados linear:

$$\underline{\Gamma}_i A = \overline{\Gamma}_i, \quad (4.26)$$

o que resulta em

$$A = \underline{\Gamma}_i^{\dagger} \overline{\Gamma}_i. \quad (4.27)$$

Determinando B e D

Primeiramente, multiplica-se a equação de entrada-saída (4.6) pela esquerda por Γ_i^{\perp} e pela direita por U_f^{\dagger} , obtendo-se

$$\Gamma_i^{\perp} Y_f U_f^{\dagger} = \Gamma_i^{\perp} \Gamma_i X_f U_f^{\dagger} + \Gamma_i^{\perp} H_i^d U_f U_f^{\dagger} + \Gamma_i^{\perp} H_i^s E_f U_f^{\dagger}, \quad (4.28)$$

em que $\Gamma_i^\perp \in \mathbb{R}^{(li-n) \times li}$ é uma matriz de posto completo que satisfaz $\Gamma_i^\perp \Gamma_i = 0$ e E_f não possui correlação com U_f^\dagger . Sendo assim, a última equação pode ser simplificada, ficando da seguinte forma:

$$\Gamma_i^\perp Y_f U_f^\dagger = \Gamma_i^\perp H_i^d. \quad (4.29)$$

A partir desse ponto a determinação de B e D é idêntica ao caso determinístico. Considerando o termo à esquerda da equação (4.29) como \mathcal{M} e Γ_i^\perp como \mathcal{L} , tem-se:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_1 & \mathcal{M}_2 & \cdots & \mathcal{M}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 & \cdots & \mathcal{L}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \cdots & D \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

no qual $\mathcal{M}_k \in \mathbb{R}^{(li-n) \times m}$ e $\mathcal{L}_k \in \mathbb{R}^{(li-n) \times l}$. Reescrevendo a equação (4.30), tem-se:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{M}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{M}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 & \cdots & \mathcal{L}_{i-1} & \mathcal{L}_i \\ \mathcal{L}_2 & \mathcal{L}_3 & \cdots & \mathcal{L}_i & 0 \\ \mathcal{L}_3 & \mathcal{L}_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{L}_i & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & \underline{\Gamma}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ B \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

este último conjunto de equações (4.31) pode ser solucionado por meio do método de mínimos quadrados para se encontrar as matrizes B e D .

4.5.2 Usando os Estados linha(X_f)

De posse das entradas, saídas e sequências de estados, pode-se formar as seguintes matrizes de dados:

$$\begin{aligned} \hat{X}_i &= (\hat{x}_i, \dots, \hat{x}_{i+j-1}), & \hat{X}_{i+1} &= (\hat{x}_{i+1}, \dots, \hat{x}_{i+j}), \\ U_i &= (u_i, \dots, u_{i+j-1}), & Y_i &= (y_i, \dots, y_{i+j-1}). \end{aligned}$$

Considerando um termo de ruído adicionado a estes dados, forma-se a seguinte equação:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}_i \\ U_i \end{pmatrix} + \varepsilon,$$

que é idêntica a equação (3.33), exceto pelo termo de ruído ε .

Então, considerando o sistema em malha aberta, os parâmetros do *modelo de inovação* podem ser estimados pelo método de mínimos quadrados. Denotando:

$$\Theta = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{pmatrix} \hat{X}_i \\ U_i \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_i \end{pmatrix},$$

a solução por mínimos quadrados pode ser obtida como se segue:

$$\Theta = \mathcal{Y}\mathcal{X}^\dagger = \mathcal{Y}\mathcal{X}^T(\mathcal{X}\mathcal{X}^T)^{-1}, \quad (4.32)$$

e os parâmetros estocásticos podem ser obtidos como:

$$R_e = \Sigma_{22}, \quad K = \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}, \quad (4.33)$$

em que

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{j - (n+m)(n+l)} (\mathcal{Y} - \Theta\mathcal{X})(\mathcal{Y} - \Theta\mathcal{X})^T.$$

4.6 O Uso de Variáveis Instrumentais

Até o presente momento, a metodologia exposta neste capítulo trabalha com estimadores não polarizados quando o ruído de processo w_k e de medição v_k forem brancos. Contudo, quando o ruído de processo e de medição forem coloridos estes estimadores serão polarizados (Viberg, 1995). Um algoritmo não polarizado que pode ser usado para determinar as matrizes do sistema é o método conhecido como *variáveis instrumentais* (VIs) (Soderstrom e Stoica, 1989). A ideia é correlacionar ambos os lados da equação (4.6) com uma variável que elimine o termo U_f e faça com que o termo de ruído E_f seja anulado assintoticamente, mas mantenha o termo de sinal intacto.

Primeiramente, para eliminar o termo de entrada multiplica-se a equação (4.6) por $\Pi_{U_f}^\perp$, obtendo-se

$$Y_f \Pi_{U_f}^\perp = \Gamma_i X_f \Pi_{U_f}^\perp + H_i^s E_f \Pi_{U_f}^\perp. \quad (4.34)$$

Para recuperar o espaço coluna de Γ_i , deve-se eliminar o termo $H_i^s E_f \Pi_{U_f}^\perp$ de modo que a influência do ruído sobre o cálculo do espaço coluna da matriz de observabilidade estendida desapareça. Deve-se encontrar uma matriz Z_j que garanta as seguintes propriedades:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} H_i^s E_f \Pi_{U_f}^\perp Z_j^T = 0, \quad (4.35)$$

$$\text{posto} \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \Gamma_i X_f \Pi_{U_f}^\perp Z_j^T \right) = n. \quad (4.36)$$

Pela propriedade (4.35), pode-se eliminar o termo $H_i^s E_f \Pi_{U_f}^\perp$ da equação (4.34), multiplicando-a por Z_j pela direita e tomando o limite para $j \rightarrow \infty$, tem-se

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} Y_f \Pi_{U_f}^\perp Z_j^T = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \Gamma_i X_f \Pi_{U_f}^\perp Z_j^T. \quad (4.37)$$

A propriedade (4.36) garante que a multiplicação por Z_j não modifica o posto do termo à direita da equação (4.37). Sendo assim,

$$\text{range} \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} Y_f \Pi_{U_f}^\perp Z_j^T \right) = \text{range}(\Gamma_i). \quad (4.38)$$

Portanto, pode-se obter estimativas, a partir de um estimador não polarizado, do espaço coluna de Γ_i pela SVD de $Y_f \Pi_{U_f}^\perp Z_j^T = O_i$.

Implementação eficiente de O_i

Para implementar o método de variáveis instrumentais, de forma mais eficiente, utiliza-se a decomposição LQ. Assim, propõe-se a decomposição LQ dada por

$$\begin{pmatrix} U_f \\ Z_j \\ Y_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \\ Q_4^T \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

O lema a seguir mostra a relação entre a decomposição LQ e a matriz $Y_f \Pi_{U_f}^\perp Z_j^T$.

Lema 4.6.1. (Viberg, 1995) Dada a fatoração LQ apresentada em (4.39), tem-se

$$Y_f \Pi_{U_f}^\perp Z_j^T = L_{32} L_{22}^T \quad (4.40)$$

Demonstração. A prova do Lema 4.6.1 é semelhante ao caso apresentado no Lema 2.5.1. De (4.39), tem-se que

$$Y_f = L_{31} Q_1^T + L_{32} Q_2^T + L_{33} Q_3^T, \quad (4.41)$$

e,

$$Z_j = L_{21} Q_1^T + L_{22} Q_2^T. \quad (4.42)$$

Fazendo-se

$$\Pi_{U_f}^\perp = I_j - Q_1 Q_1^T = Q_2 Q_2^T + Q_3 Q_3^T + Q_4 Q_4^T. \quad (4.43)$$

Tem-se que

$$Y_f \Pi_{U_f}^\perp Z_j^T = (L_{31} Q_1^T + L_{32} Q_2^T + L_{33} Q_3^T)(Q_2 Q_2^T + Q_3 Q_3^T + Q_4 Q_4^T)(L_{21} Q_1^T + L_{22} Q_2^T)^T \quad (4.44)$$

$$= (L_{32} Q_2^T + L_{33} Q_3^T)(Q_1 L_{21}^T + Q_2 L_{22}^T) \quad (4.45)$$

$$= L_{32} L_{22}^T, \quad (4.46)$$

completando a prova. \square

Assim, a matriz $L_{32} L_{22}^T$ pode ser usada para obter estimativas de maneira não polarizada das matrizes do sistema. Agora deve-se determinar como escolher a matriz Z_j .

4.6.1 Ruído de Medição Colorido (MOESP-PI)

Nesta seção, será tratado o método de identificação por subespaços, que considera sistemas com ruído de processo w_k igual a zero e o ruído de medição v_k como uma sequência de ruído colorido, como a seguir

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (4.47)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k + v_k. \quad (4.48)$$

Conforme apresentado na Seção 4.6 quando o ruído de processo (w_k) ou medição (v_k) não é branco, pode-se encontrar uma *variável de instrumentos* que satisfaça as condições (4.35) e (4.36). Por exemplo, se considerar a variável instrumental $Z_j = U_f$, a condição (4.35) é satisfeita, pois u_k e v_k não são correlacionados. Entretanto, a condição (4.36) não é satisfeita, uma vez que $\Gamma_i X_f \Pi_{U_f}^\perp U_f^T = 0$. Portanto, $Z_j = U_f$ não é uma boa escolha. Assim, uma escolha factível seria os dados de entradas passadas U_p . Em Verhaegen e Verdult (2007) mostra-se que U_p é o termo apropriado para remover tanto U_f quanto E_f . Em linhas gerais, multiplica-se a equação (4.6) por $\Pi_{U_f}^\perp U_p^T$ pela direita, obtendo-se

$$Y_f \Pi_{U_f}^\perp U_p^T = \Gamma_i X_f \Pi_{U_f}^\perp U_p^T + H_i^d U_f \Pi_{U_f}^\perp U_p^T + H_i^s E_f \Pi_{U_f}^\perp U_p^T. \quad (4.49)$$

Como pode-se verificar, o termo de entradas futuras pode ser eliminado ($H_i^d U_f \Pi_{U_f}^\perp U_p^T = 0$) e o termo de ruído, à medida que o número de medições tender ao infinito, assintoticamente desaparecerá

$$\lim_{j \rightarrow \infty} H_i^s E_f \Pi_{U_f}^\perp U_p^T = 0. \quad (4.50)$$

A condição de posto (4.36) da matriz $\Gamma_i X_f \Pi_{U_f}^\perp U_p^T$ como mostrado em Verhaegen e Verdult (2007) também é assegurada. O método de identificação que foi apresentado nesta seção é conhecido como MOESP-PI, em que o termo PI se refere a *past inputs* (entradas passadas) que é utilizada como uma matriz de variáveis instrumentais.

4.6.2 Ruído de Medição e Processo Colorido (MOESP-PO)

Nesta seção, será tratado o método de identificação por subespaços, em que, tanto o ruído de processo w_k quanto de medição v_k adicionados ao sistema são sequências de ruído colorido, como se segue

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k, \quad (4.51)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k + v_k. \quad (4.52)$$

Como mostrado em Viberg (1995), quando as entradas passadas são usadas para compor a matriz variáveis instrumentais, se existir alguma dinâmica adicional devido ao distúrbio colorido, o estimador MOESP-PI poderá ser polarizado (Verhaegen, 1994). Sendo assim, para obedecer a condição (4.36), pode-se expandir a variável instrumental incorporando as saídas passadas Y_p , como a seguir

$$Z_j = \begin{pmatrix} U_p \\ Y_p \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Este algoritmo é denominado MOESP-PO, em que PO denota a variável instrumental de *Past Outputs* (saídas passadas). De forma similar a (4.49), utilizando-se a variável instrumental (4.53), tem-se

$$Y_f \Pi_{U_f}^\perp \begin{pmatrix} U_p^T \\ Y_p^T \end{pmatrix} = \Gamma_i X_f \Pi_{U_f}^\perp \begin{pmatrix} U_p^T \\ Y_p^T \end{pmatrix} + H_i^d U_f \Pi_{U_f}^\perp \begin{pmatrix} U_p^T \\ Y_p^T \end{pmatrix} + H_i^s E_f \Pi_{U_f}^\perp \begin{pmatrix} U_p^T \\ Y_p^T \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

Como mostrado em Verhaegen e Verdult (2007) as condições (4.35) e (4.36) são asseguradas. Portanto, a matriz $\Gamma_i X_f \Pi_{U_f}^\perp \begin{pmatrix} U_p^T \\ Y_p^T \end{pmatrix}$ pode se obtida por meio da seguinte decomposição LQ:

$$\begin{pmatrix} U_f \\ \begin{bmatrix} U_p \\ Y_p \end{bmatrix} \\ Y_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \\ Q_4^T \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

em que, a estimativa de $Y_f \Pi_{U_f}^\perp \begin{pmatrix} U_p^T \\ Y_p^T \end{pmatrix}$ é dada por (Verhaegen, 1994; Verhaegen e Verdult, 2007):

$$\text{range} \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{j}} L_{32} \right) = \text{range}(O_i). \quad (4.56)$$

Sendo assim, obtida a matriz O_i para os métodos MOESP-PI e MOESP-PO, a obtenção das matrizes A , B , C , e D é idêntica a metodologia apresentada na Seção 4.5.1.

Um ponto importante a se observar é que ao utilizar as variáveis instrumentais PI e PO para obter a matriz O_i , naturalmente, a SVD desta última matriz trará maiores informações sobre a ordem do modelo, pois, O_i estará decorrelacionada com ruído. Para evidenciar alguns aspectos práticos da melhora na identificação de um sistema pelos métodos baseados em VI, são apresentados, a seguir, dois exemplos comparando os métodos MOESP-PI e MOESP-PO com o método MOESP.

Exemplo 4.6.1. Considere o sistema (3.24)-(3.25) apresentado no Exemplo 3.6.1. Com a sequência de ruído v_k gerada pela equação (3.35) apresentada no Exemplo 3.8.1. Além de ruído de medição v_k , adicionou-se ruído de processo w_k , branco com média nula e desvio padrão unitário aos dados desse sistema. Foram geradas 500 amostras, sendo 400 para identificação e 100 para validação. Manteve-se uma relação sinal ruído de $(\sigma_s^2/\sigma_n^2) \approx 70$. De posse dos dados de identificação, foram montadas as matrizes de dados e obtendo-se a matriz de projeção O_i para cada um dos métodos, MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO. As matrizes de projeção oblíqua, obtidas por cada método, foram decompostas pela SVD. Os valores singulares de cada uma dessas projeções são mostrados no gráfico de barras da Figura 4.4.

Como se pode verificar na Figura 4.4, pela metodologia MOESP é, praticamente, impossível determinar a ordem do sistema. Pois, a magnitude dos valores singulares são bem próximas, dificultando a análise. Por outro lado, o método MOESP-PI apresenta uma mudança significativa no padrão dos valores singulares, o que facilita a determinação da ordem do sistema. Como foi mencionado na Seção 3.6, na prática, a ordem do sistema é dada pelos valores singulares mais significativos, que neste caso são os dois primeiros. Portanto, o sistema é de segunda ordem, o que era de se esperar. Um outro ponto importante é que apesar da melhora apresentada pelo MOESP-PI, verifica-se na Figura 4.4 que os valores singulares de maior magnitude são apresentados pelo MOESP-PO. Para facilitar a visualização da diferença do segundo valor singular

para o terceiro é apresentado na Figura 3.9 vetores da diferença entre esses valores singulares.

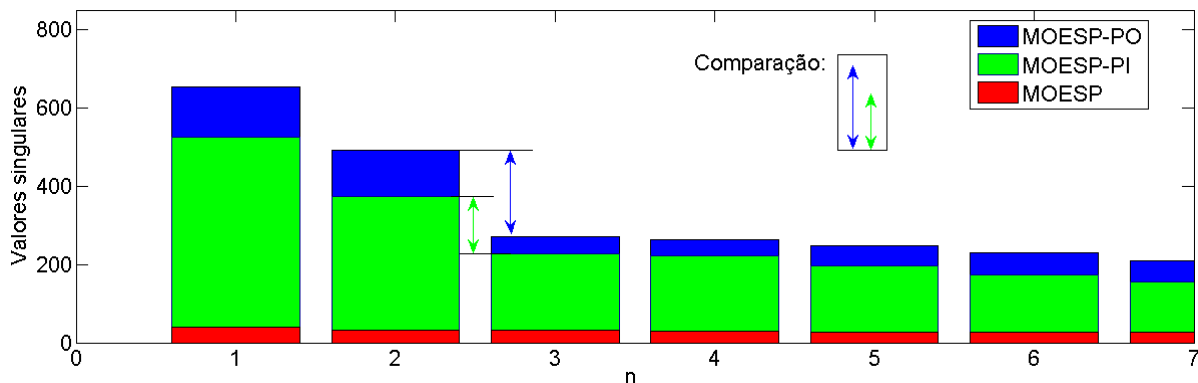


Figura 4.4: Comparação dos valores singulares estimados pelos métodos MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO para a determinação da ordem do sistema. □

Exemplo 4.6.2. A fim de comparar a robustez dos métodos MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO quando sujeitos à ruído de processo e medição, foram geradas 100 seqüências de ruído v_k , por meio do filtro apresentado na equação (3.35), e 100 de ruído w_k , branco com média nula e desvio padrão unitário. Os algoritmos foram testados 100 vezes para cada realização de ruído de processo e medição, gerados e adicionados ao sistema representado em (3.24)-(3.25). De cada realização, foram obtidas 500 amostras, em que 400 foram utilizadas para identificação e 100 para validação. Foi mantida a relação sinal ruído de $(\sigma_s^2/\sigma_n^2) \approx 70$. Os algoritmos de identificação MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO foram aplicados nessas massas de dados. A Figura 4.5 mostra a validação por simulação livre dos modelos estimados para cada uma das 100 realizações de ruído. Como pode-se verificar, os modelos estimados acompanharam bem a dinâmica do sistema e, praticamente, não se consegue distinguir o desempenho dos mesmos. Entretanto, percebe-se, de forma sutil, que o desempenho dos modelos em verde (MOESP-PI) e azul (MOESP-PO) são levemente superiores ao em vermelho (MOESP).

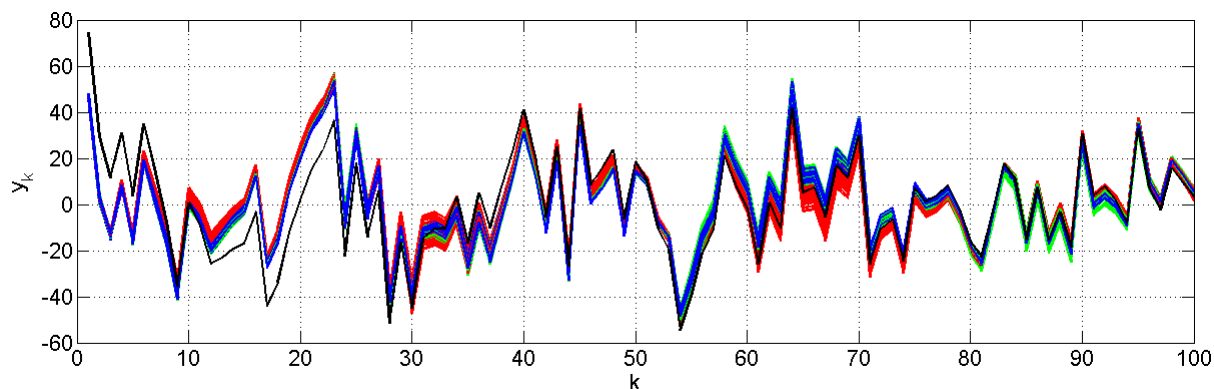


Figura 4.5: Validação por simulação livre dos modelos obtidos para o circuito RLC. (-) em preto, saída do sistema em volts. (-) em vermelho, saída estimada pelo MOESP. (-) em verde, saída estimada pelo MOESP-PI. (-) em azul, saída estimada pelo MOESP-PO.

Apesar de não haverem diferenças significativas dos desempenhos dos métodos nas validações dinâmicas, verifica-se por meio da Figura 4.6 que o método MOESP produz estimativas polarizadas dos autovalores da matriz A do circuito RLC, o que não ocorre com o método MOESP-PI e, em menor grau, ocorre com o MOESP-PO. Nesse caso, fica evidente que ao se utilizarem as variáveis instrumentais de PI e PO há uma redução no efeito da polarização. Entretanto, percebe-se claramente o dilema polarização/variância, no caso do uso das variáveis instrumentais de PI.

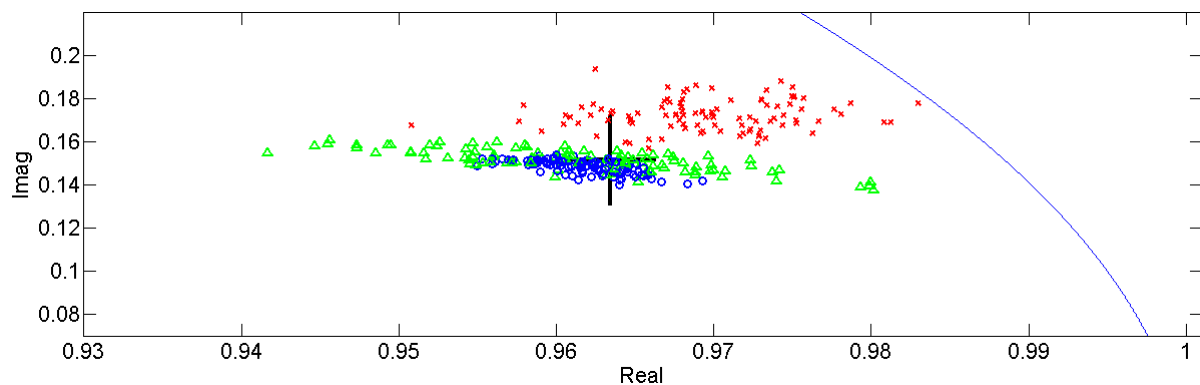


Figura 4.6: Comparação dos autovalores estimados com o autovalor original da matriz A do circuito RLC para 100 realizações de ruído de medição colorido. (x) MOESP, (Δ) MOESP-PI, (o) MOESP-PO, (+) autovalor original do sistema.

A fim de quantificar e comparar o desempenho dos métodos MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO com relação a validação dinâmica e a estimação dos autovalores da matriz A , propõe-se o uso das Figuras 4.7 e 4.8.

Na Figura 4.7 o erro ao estimar os autovalores da matriz A é dado pelo valor absoluto da distância entre o autovalor real A e o estimado \hat{A} , para cada uma das 100 realizações de ruído geradas. Para cada uma dessas realizações de ruído foi plotado o erro de um método pelo erro do outro. Assim, quanto maior o erro ao estimar o autovalor de A maior será o número de pontos acima ou abaixo da linha vermelha, que divide o plano cartesiano em duas regiões, uma para cada método, como pode ser visto nas Figuras 4.7 (a), (c) e (e). À direita nas Figuras 4.7 (b), (d) e (f) são mostrados os respectivos erros de cada método. De acordo com os resultados apresentados na Figura 4.7, pode-se considerar que o método MOESP-PO é o mais indicado quando o sistema está sujeito a ruído de medição e de processo.

Por outro lado, na Figura 4.8 foram comparados os índices RMSE das séries temporais, obtidas para cada uma das realizações de ruído. Assim, quanto maior for o índice RMSE pior será o desempenho do estimador. Dessa forma, seguindo o mesmo procedimento adotado na Figura 4.7, nas Figuras 4.8 (a), (c) e (e) quanto maior o número de pontos correspondentes a um método, abaixo ou acima da linha vermelha, pior será seu desempenho em relação ao outro. Também, nas Figuras 4.8 (b), (d) e (f) são apresentados os histogramas dos índices RMSE para cada um dos métodos, para as 100 realizações de ruído geradas. Nesse caso, pode-se perceber que os métodos MOESP-PI e MOESP-PO são, de longe, melhores que o método MOESP, devido ao tratamento dado por esses métodos ao ruído presente nos dados. Ao comparar os métodos

MOESP-PI e MOESP-PO, apesar do método MOESP-PO aparentar desempenho superior, não se pode afirmar que tal método é muito superior ao outro. Pois, como observa-se nos histogramas das Figuras 4.8 (d) e (f), os desempenhos desses métodos são estatisticamente equivalentes.

Para finalizar este exemplo, os resultados apresentados nas Figuras 4.7 e 4.8 são resumidos na Tabela 4.6.2.

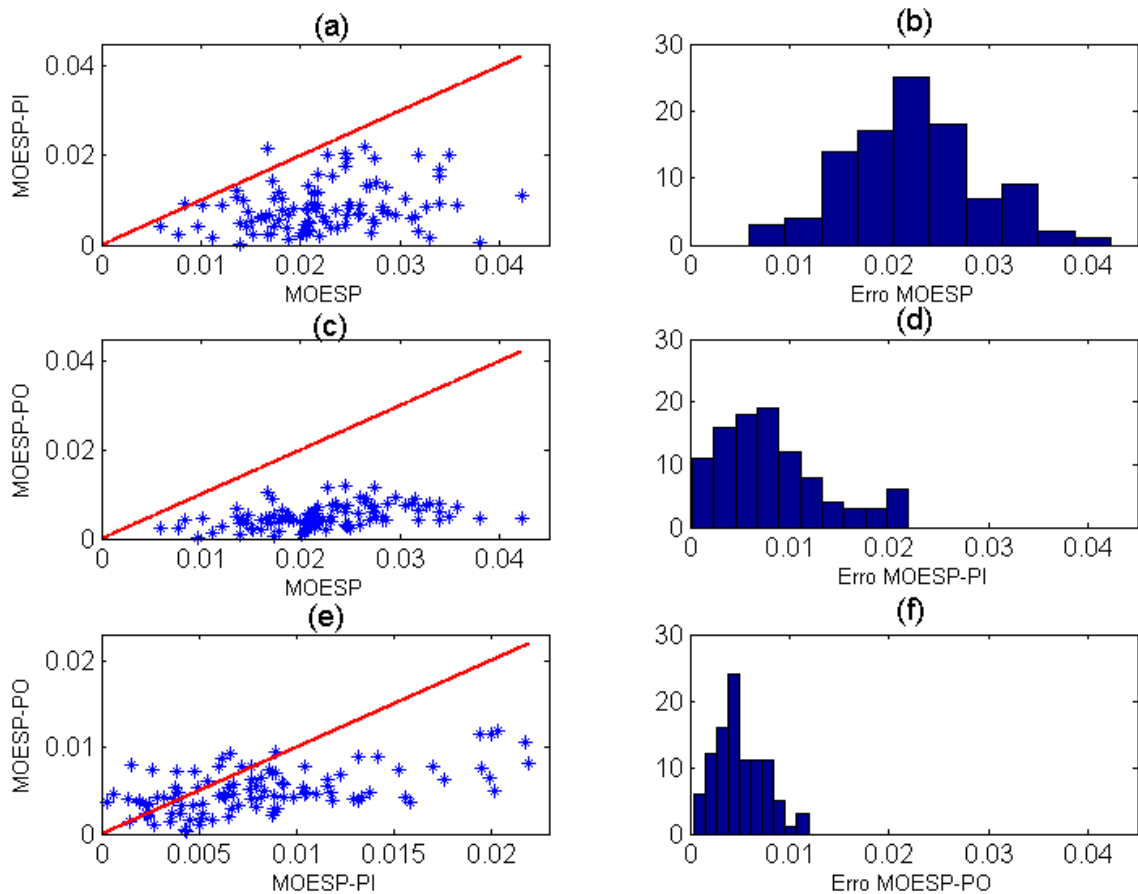


Figura 4.7: Comparação dos métodos por meio do erro de estimação dos autovalores do circuito RLC para 100 realizações de ruído. (a) MOESP (eixo-x) versus MOESP-PI (eixo-y). MOESP-PI é a melhor escolha em 98% dos casos. (b) Histograma do erro de estimação do autovalor para o MOESP. (c) MOESP (eixo-x) versus MOESP-PO (eixo-y). MOESP-PO é a melhor escolha em 100% dos casos. (d) Histograma do erro de estimação do autovalor para o MOESP-PI. (e) MOESP-PI (eixo-x) versus MOESP-PO (eixo-y). MOESP-PO é a melhor escolha em 75% dos casos. (f) Histograma do erro de estimação do autovalor para o MOESP-PO.

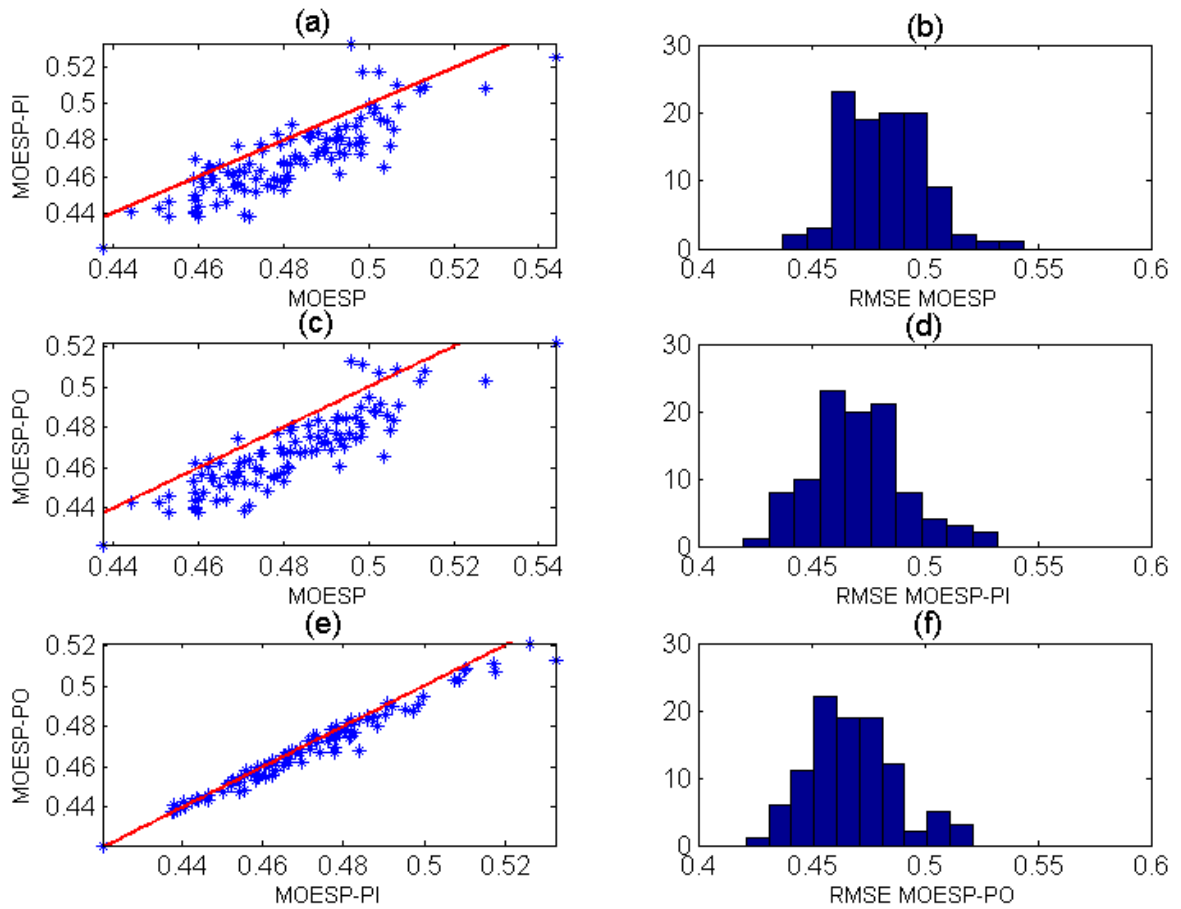


Figura 4.8: Comparação dos métodos por meio do RMSE das séries temporais do circuito RLC para 100 realizações de ruído. (a) MOESP (eixo-x) versus MOESP-PI (eixo-y). MOESP-PI é a melhor escolha em 88% dos casos. (b) Histograma do RMSE para o MOESP. (c) MOESP (eixo-x) versus MOESP-PO (eixo-y). MOESP-PO é a melhor escolha em 93% dos casos. (d) Histograma do RMSE para o MOESP-PI. (e) MOESP-PI (eixo-x) versus MOESP-PO (eixo-y). MOESP-PO é a melhor escolha em 70% dos casos. (f) Histograma do RMSE para o MOESP-PO.

Tabela 4.1: Quadro comparando o desempenho dos métodos em relação ao erro ao estimar os autovalores da matriz A do circuito RLC e com relação ao índice RMSE.

>	MOESP		MOESP-PI		MOESP-PO	
	Erro Autovalor (%)	RMSE (%)	Erro Autovalor (%)	RMSE (%)	Erro Autovalor (%)	RMSE (%)
MOESP	***	***	98	88	100	93
MOESP-PI	2	12	***	***	75	70
MOESP-PO	0	7	25	30	***	***

□

4.7 Considerações Finais

Neste capítulo foi apresentado o método de identificação por subespaços para sistemas estocásticos. Buscou-se, de alguma forma, relacionar os conceitos apresentados no Capítulo 3 com os apresentados neste capítulo. Mostrou-se que quando o ruído de processo e medição é branco, o método estocástico se resume ao método determinístico. Contudo, quando ruído colorido é adicionado ao sistema, pode-se lançar mão do método de variáveis instrumentais, para que o estimador não seja polarizado. Por fim, dois algoritmos baseados em variável de instrumentos foram apresentados.

Resultados

“O homem é como uma função, cujo numerador é o que ele é e cujo denominador é o que ele pensa dele mesmo. Quanto maior o denominador, menor a fração.”

L. N. Tolstói

5.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos na identificação de dois sistemas experimentais e um simulado. Os sistemas experimentais sob estudo são: planta de bombeamento de água (Ricco et al., 2011) e planta de flotação em coluna. O sistema simulado trata-se um motor de corrente contínua com campo constante. Os resultados obtidos pelos métodos de identificação por subespaços (SIM¹) para estes sistemas são comparados com resultados obtidos usando outras técnicas.

5.2 Motor de Corrente Contínua (CC)

Nesta seção, será realizada a identificação de um motor de corrente contínua com corrente de campo constante. Para este propósito utilizou-se duas metodologias distintas: a de subespaços com os algoritmos MOESP-PI e MOESP-PO e a de predição de erro com o MQE. A modelagem pelas relações físicas do motor de corrente contínua apresentados neste estudo de caso foram obtidos de Geromel e Palhares (2004). A Figura 5.1 apresenta o diagrama esquemático do motor de corrente contínua.

¹Do inglês, *Subspace Identification Methods*.

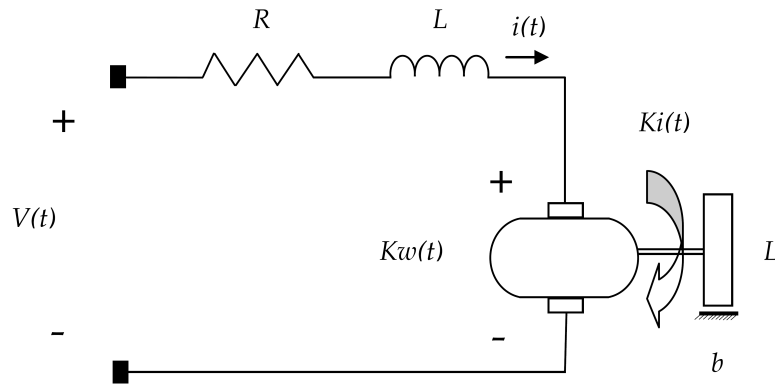


Figura 5.1: Diagrama esquemático do motor de corrente contínua. Adaptado de (Geromel e Palhares, 2004).

O motor de corrente contínua é um dispositivo eletromecânico constituído por um conjunto de espiras conectadas em série, dispostas em forma circular formando uma bobina condutora, com liberdade de movimento rotacional em torno de seu eixo e um par de pólos magnéticos permanente ou produzidos por corrente constante, com o contorno interno também circular, e raio um pouco maior que o da bobina, de tal forma que as linhas de campo sejam sempre ortogonais a qualquer tangente à circunferência que delimita a bobina. Nesta configuração, pretende-se garantir que as linhas de campo que cruzam qualquer espira estejam na direção radial, ou seja, no plano de rotação, o vetor velocidade é ortogonal ao vetor indução magnética. A bobina é enrolada sobre um núcleo de ferro cilíndrico denominado rotor ou armadura cujo eixo estará submetido a um torque proporcional a uma determinada corrente elétrica que circula na bobina. O torque transferido ao eixo produz um movimento circular o qual, em contra partida, produz na bobina uma tensão elétrica denominada força contra-eletromotriz que é proporcional à sua velocidade angular (Fitzgerald et al., 1975; Geromel e Palhares, 2004). Considerando que a bobina pode ser modelada como um resistor e um indutor em série e sendo $\theta(t)$ o deslocamento angular do rotor com um momento de inércia J , que é submetido a um atrito viscoso rotacional com coeficiente b , o modelo do motor CC pode ser escrito na forma

$$L \frac{di}{dt}(t) + Ri(t) = V(t) - Kw(t), \quad (5.1)$$

$$J \frac{dw}{dt}(t) + bw(t) = Ki(t), \quad w(t) = \frac{d\theta}{dt}(t). \quad (5.2)$$

escolhendo se devidamente as condições iniciais $\theta(0)$, $w(0)$ e $i(0)$, define-se as seguintes variáveis

$$x(t) \triangleq \begin{bmatrix} i(t) \\ w(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) \triangleq \begin{bmatrix} i(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) \triangleq [V(t)]. \quad (5.3)$$

A representação em espaço de estados, em tempo contínuo, do sistema apresentado na Figura 5.1 é apresentada nas equações (5.4) e (5.5).

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -R/L & -K/L & 0 \\ K/J & -b/J & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (5.4)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (5.5)$$

este modelo é de ordem $n = 3$ e permite obter a corrente de armadura, a velocidade angular e o deslocamento angular do rotor. Neste estudo de caso o interesse é apenas na corrente de armadura ($i(t)$) e a velocidade angular ($w(t)$) do rotor. Portanto, o modelo pode ter sua ordem reduzida para dois, tendo em vista que as equações (5.1) e (5.2) que definem estas variáveis não dependem explicitamente do deslocamento angular. Contudo, nos testes realizados para obter os dados de identificação manteve-se o modelo apresentado em (5.4) e (5.5) e aquisitou-se apenas os sinais de $i(t)$ e $w(t)$. Os parâmetros de simulação foram obtidos de testes realizados por Geromel e Palhares (2004), e estes foram $R = 3,33 \Omega$, $L = 4,56 \text{ mH}$, $K = 0,0332 \text{ Vs}$, $b = 4,59 \cdot 10^{-5} \text{ Nms}$ e $J = 4,96 \cdot 10^{-5} \text{ Kgm}^2$. Discretizou-se o sistema com uma taxa de amostragem de $T_s = 0,01 \text{ s}$.

5.2.1 Testes para Identificação

Do ensaio ao degrau, obteve-se a constante de tempo dominante de aproximadamente $T = 0,1\text{s}$. De posse da constante de tempo dominante, escolheu-se a frequência de amostragem (f_a) do sistema igual a 10 vezes a maior frequência de interesse (f_s) contida nos dados. Assim, a f_a escolhida é de 100Hz. Para excitar a dinâmica do sistema projetou-se um sinal PRBS com *sequência* m igual a 8 e 16 bits. Utilizando as funções de autocorrelação verificou-se que não haveria necessidade de decimar o sinal. Os sinais utilizados para identificação são mostrados na Figura 5.2.

5.2.2 Identificação do Sistema

Os modelos foram obtidos por meio dos algoritmos MOESP-PI, MOESP-PO e MQE. Para os métodos MOESP-PI e MOESP-PO, definiu-se a ordem dos modelos por meio da análise dos valores singulares, seguindo as diretrizes apresentadas na Seção 4.3. Desse modo verificou-se que os modelos seriam de segunda ordem. Nos modelos polinomiais ARMAX, deve-se encontrar um modelo \mathcal{P} para cada saída, ou seja, \mathcal{P}_1 para y_1 e \mathcal{P}_2 para y_2 . Primeiramente foram gerados todos os termos candidatos. A fim de se realizar uma comparação direta com os algoritmos de subespaços MOESP-PI e MOESP-PO, definiu-se os máximos atrasos para u e e (termo de ruído) em \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 , para y_1 em \mathcal{P}_1 e para y_2 em \mathcal{P}_2 , de 2 atrasos. O número de iterações de ruído foi igual a 10. Definiu-se o número de termos a serem considerados no modelo pelo *critério informação de Akaike* (Akaike, 1974a). Por fim, estimou-se os parâmetros para cada modelo utilizando o MQE.

Os parâmetros dos modelos obtidos pelos métodos de subespaços e de predição de erro não são aqui apresentados, pois, a ideia é somente comparar o desempenho dos diferentes métodos de estimação linear.

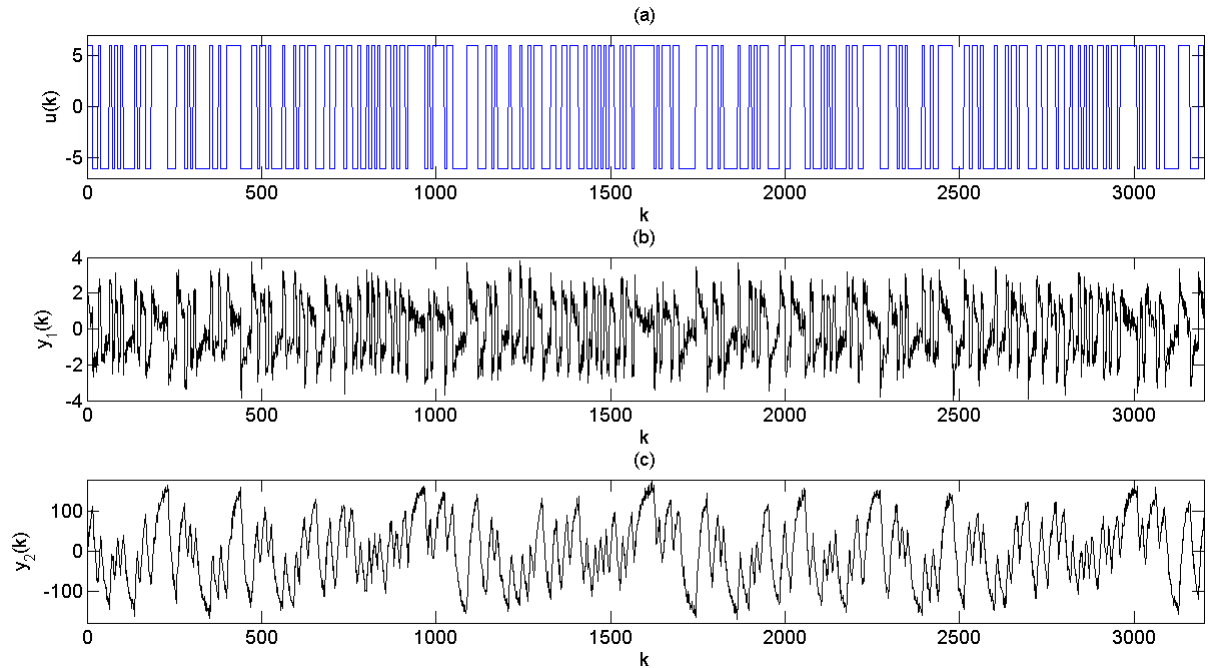


Figura 5.2: Dados de identificação do motor CC. (a) sinal PRBS aplicado à entrada u_k , (b) y_1 - sinal de saída correspondente à corrente de armadura e (c) y_2 - sinal de saída correspondente à velocidade angular do rotor.

5.2.3 Validação dos Modelos

A Figura 5.3 mostra parte da simulação livre do modelos obtidos. Como pode ser observado, os modelos conseguiram acompanhar bem o comportamento dinâmico do sistema. Na Figura 5.4 pode-se verificar que o desempenho dos métodos foram equivalentes.

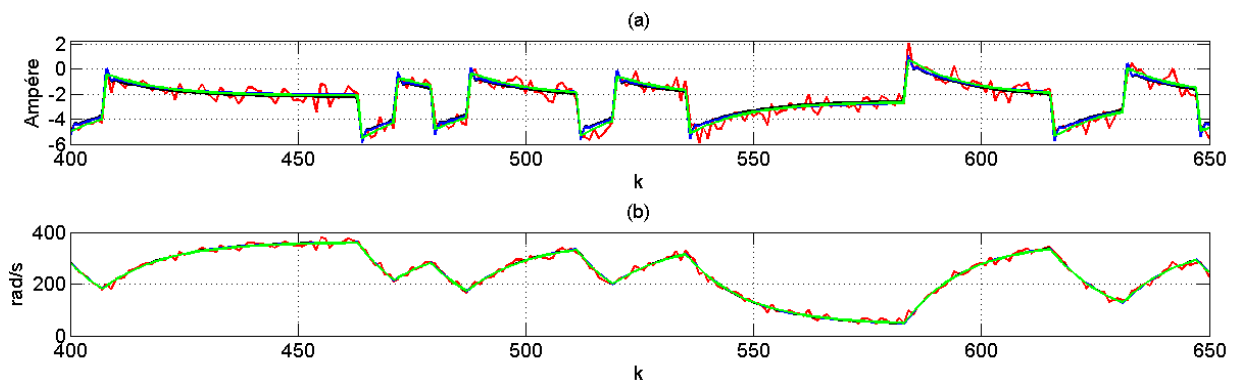


Figura 5.3: Validação por simulação livre do modelos obtidos para o motor de corrente contínua. (a) y_1 - corrente de armadura e (b) y_2 - velocidade angular do rotor. (-) em verde, dados estimados pelo MQE, (-) em azul, dados estimados pelo MOESP-PI, (-) em preto, dados estimados pelo MOESP-PO e (-) em vermelho, dados experimentais.

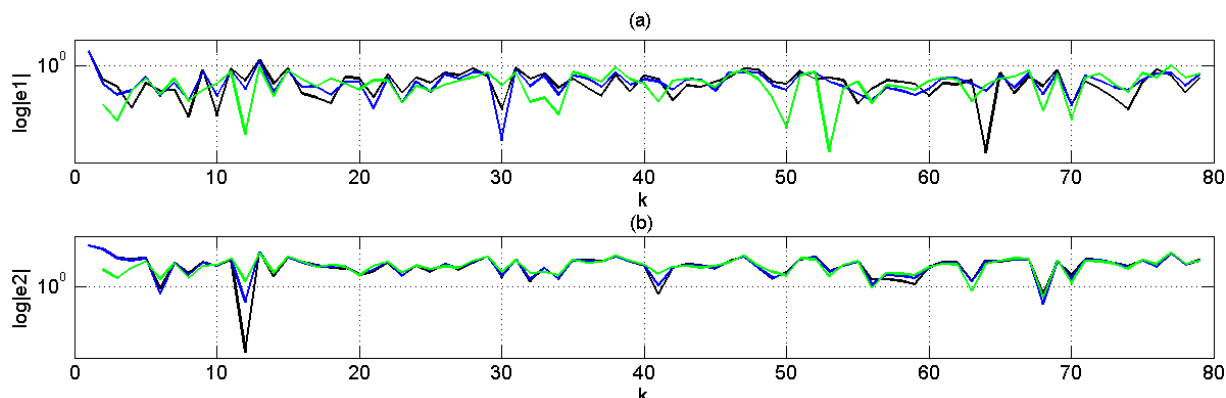


Figura 5.4: Gráfico do logarítmico do erro de ajuste dos modelos aos dados. (a) y_1 - corrente de armadura e (b) y_2 - velocidade angular do rotor. (-) em verde, dados estimados pelo MQE, (-) em azul, dados estimados pelo MOESP-PI e (-) em preto, dados estimados pelo MOESP-PO.

Para analisar a qualidade dos modelos obtidos, por cada um dos algoritmos, utilizou-se os índices RMSE e VAF. Tais índices são apresentados na Tabela 5.1 em conjunto com o tempo total de estimação dos parâmetros e com o número de termos de processo de cada modelo.

Tabela 5.1: Comparação entre os modelos obtidos para o motor CC.

Algoritmo		NT	RMSE	VAF	Ttot(s)
MQE	y_1	4	0,29	91,88	0,037
	y_2	4	0,12	98,69	
MOESP-PI	y_1	16	0,31	90,22	0,036
	y_2		0,13	98,37	
MOESP-PO	y_1	16	0,33	89,13	0,036
	y_2		0,13	98,35	

NT - número de termos de processo.

Ttot(s) - tempo total requerido, em segundos, para que o MATLAB execute a estimação dos parâmetros do modelo em questão.

Nota-se que o melhor desempenho em termos de ajuste aos dados experimentais, pelos índices RMSE e VAF, foram dados pelo MQE em primeiro lugar, seguido pelo MOESP-PI e, por último, pelo MOESP-PO. Contudo, a diferença entre eles é mínima, ficando difícil caracterizar o melhor. Por outro lado, com relação ao Ttot(s), o desempenho dos métodos de subespaços MOESP-PI e MOESP-PO foi pouco menor que o de predição de erro (MQE), mesmo levando em conta que o NT do MQE é menor que dos métodos de subespaços MOESP-PI e MOESP-PO. Isso já era de se esperar, pois os métodos de subespaços que utilizam variáveis instrumentais (VI) não são iterativos (não realizam iterações de ruído como no MQE).

5.3 Planta de Bombeamento de Água

O sistema em estudo foi projetado para a realização de testes que permitem a medição e controle da vazão de água, bem como suas respectivas pressões internas. Um diagrama esquemático de tal aparato experimental é mostrada na Figura 5.5.

As duas motobombas (MB 1 e MB 2), com motores de 20 cv, são responsáveis pela sucção da água do reservatório 1 para os dutos de escoamento. Cada motobomba é acionada por um inversor de frequência. Durante a realização dos testes para identificação, acionou-se apenas a MB 2. Como pode ser observado, a água é succionada do reservatório 1 para o reservatório 2. Deve-se ressaltar que, também, há um fluxo de água de um reservatório para o outro. Foram instalados dois sensores: um sensor eletromagnético e o outro piezoresistivo, os quais são responsáveis por mensurar a vazão e a pressão, respectivamente.

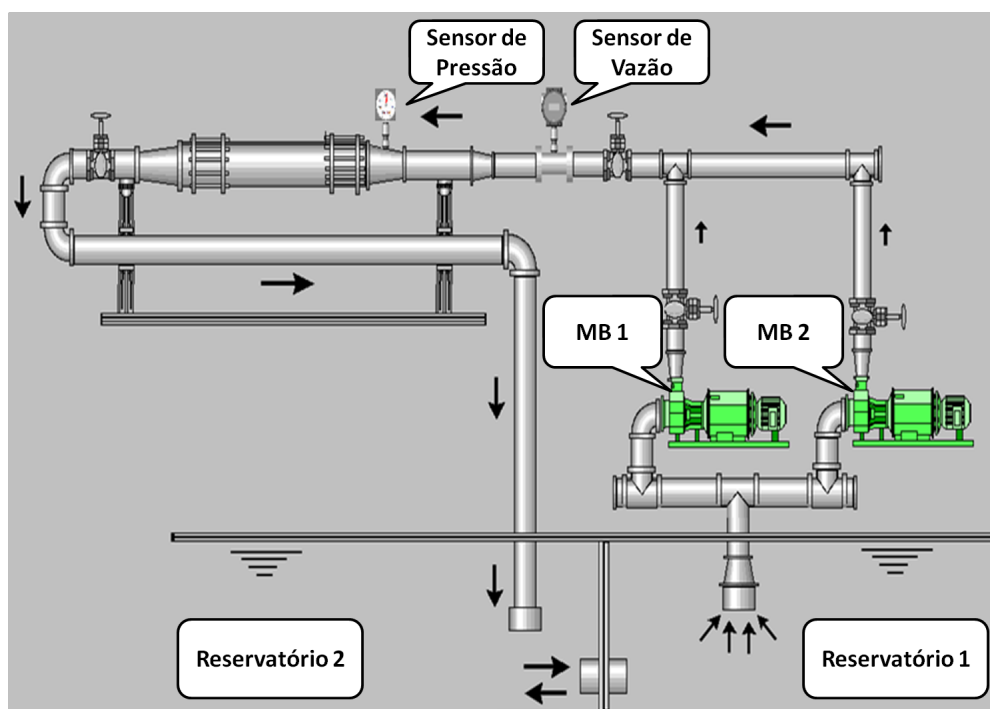


Figura 5.5: Esquemático do sistema de bombeamento de água. MB 1 e MB 2 são as motobombas 1 e 2, respectivamente.

5.3.1 Testes para a Identificação

O inversor de frequência foi utilizado na configuração escalar, ou seja, relação tensão-frequência (V/F) constante. Essa relação V/F varia linearmente com um sinal contínuo de entrada que excursiona de 0V a 5V. Assim, estabelece-se o sinal de entrada do inversor como a entrada u do sistema.

Os sinais de saída dos sensores de vazão e pressão variam de 4 a 20mA. Eles são devidamente condicionados de forma que excursionem de -10V a 10V. Esses sinais foram escolhidos como

sinas de saída da planta, sendo, y_1 o sinal de vazão e y_2 o sinal de pressão. Os dados de entrada e saídas foram coletados por meio de uma placa de aquisição de dados *National Instruments*, modelo *NI USB-6008*. A placa de aquisição de dados utilizada possui oito entradas analógicas que trabalham na faixa de -10V a 10V e duas saídas analógicas que trabalham na faixa de 0V a 5V. Para os ensaios ao degrau e de excitação aleatória da planta, foi configurado em ambiente *LabView 9.0* um sistema supervisório responsável pela especificação da geração e coleta dos sinais de entrada e saídas, respectivamente.

O ensaio ao degrau do sistema foi realizado excursionando numa faixa de operação de 3V a 5V. A constante de tempo dominante obtida foi de aproximadamente 7s. De posse da constante de tempo, pode-se escolher a frequência de amostragem (f_a) do sistema. Na prática, f_a é normalmente escolhida de 5 a 10 vezes maior do que a maior frequência de interesse (f_s) contida nos dados. Assim, a f_a escolhida é de 20Hz. Optou-se por superamostrar os dados medidos, pois, se necessário, pode-se decimar o sinal antes da identificação.

Projetou-se, assim, um sinal de entrada com característica aleatória. Sendo que, cada patamar do sinal de excitação (aleatório) é mantido por pelo menos 8 segundos. Esse ensaio é realizado por um período de 40 minutos, resultando num total de 48000 amostras. A massa de dados é dividida, sendo 25000 amostras utilizadas para a identificação e as 23000 amostras restantes, utilizadas para a validação. Os dados de entrada e saídas utilizados para a identificação, devidamente decimados, podem ser vistos na Figura 5.6.

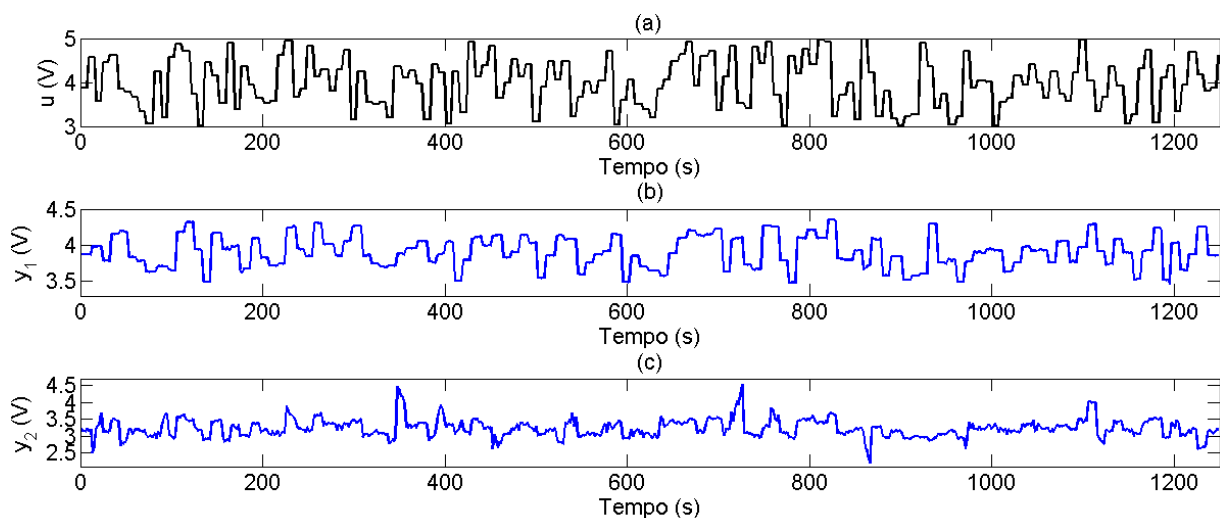


Figura 5.6: Dados de identificação da planta de bombeamento de água. (a) sinal aleatório de comando do inversor em volts, (b) sinal de saída em volts correspondente à vazão, (c) sinal de saída em volts correspondente à pressão.

5.3.2 Identificação do Sistema

De posse dos dados do ensaio de excitação aleatória, o passo seguinte é realizar a identificação do sistema. A identificação é realizada por dois métodos, o de identificação por subespaços com o algoritmo robusto combinado (ARC) e o de predição de erro com o mínimos quadrados

estendido (MQE). Detalhes sobre o ARC, que é uma versão mais robusta² do algoritmo N4SID, podem ser encontrados em (Van Overschee e De Moor, 1996) e, sobre o MQE podem ser vistos em (Aguirre, 2007).

Conforme descrito nos Capítulos 3 e 4, uma das vantagens do SIM é que não há necessidade de encontrar um modelo para cada saída (vazão e pressão). Uma outra vantagem é que os SIM não necessitam de muitos parâmetros de inicialização. O único parâmetro de inicialização que se deve determinar é a ordem do modelo. Sendo assim, após algumas simulações variando a ordem do sistema, escolheu-se o modelo de quarta ordem, pois foi a representação que melhor se adaptou aos dados de acordo com o índice RMSE.

O ARC produz um modelo linear (2.1) - (2.2) com parâmetros:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0,80 & 0,29 & 0,06 & -0,07 \\ -0,20 & 0,77 & 0,06 & 0,23 \\ -0,13 & 0,04 & 0,76 & 0,04 \\ 0,05 & -0,10 & -0,03 & 0,95 \end{bmatrix}, \\
 B &= \begin{bmatrix} -0,26 \\ -0,28 \\ -0,06 \\ -0,03 \end{bmatrix}, \\
 C &= \begin{bmatrix} -0,26 & 0,08 & 0,18 & -0,05 \\ -0,26 & 0,18 & -0,19 & -0,04 \end{bmatrix}, \\
 D &= \begin{bmatrix} -0,02 \\ -0,01 \end{bmatrix}. \tag{5.6}
 \end{aligned}$$

Nos modelos polinomiais lineares (ARMAX³) e não-lineares (NARMAX⁴), ao contrário dos SIM, é necessário encontrar um modelo (\mathcal{F}) para cada saída, ou seja, \mathcal{F}_1 para y_1 e \mathcal{F}_2 para y_2 . Levando isso em consideração, as etapas para a identificação da planta de bombeamento de água, utilizando o algoritmo MQE, foram feitas da seguinte maneira:

- Primeiramente, foram gerados modelos com todos os termos candidatos, ou seja, foi necessário definir os possíveis regressores de processo (entrada e saída) e de ruído que foram inclusos. Sendo assim, com o intuito de se realizar uma comparação direta dos modelos estimados pelo MQE com o ARC, definiu-se para os modelos ARMAX e NARMAX uma ordem igual a 4, em ambos os subsistemas, \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 . Para o sistema ARMAX os máximos atrasos da entrada (u) foram definidos em 11, para o subsistema \mathcal{F}_1 , e 15, para o subsistema \mathcal{F}_2 , os máximos atrasos do termo de ruído (e) foram definidos como 9, em \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 . No sistema NARMAX definiu-se o grau de não-linearidade igual a 2, uma vez que para o sistema em estudo não foram notadas grandes diferenças para graus de não-linearidade maiores. Dessa forma, os máximos atrasos dos regressores de entrada (u) e de ruído (e) ficaram definidos como 4 em ambos os subsistemas, \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 .

²Robusta no sentido de ter sido aplicada a diversos processos industriais e ser computacionalmente mais eficiente que o N4SID (Van Overschee e De Moor, 1996)[pp. 123].

³Do inglês, *Auto-Regressive with Moving Average and exogenous inputs*.

⁴Do inglês, *Non-linear Auto-Regressive with Moving Average and exogenous inputs*.

- Por conseguinte, de posse da estrutura dos modelos (ARMAX e NARMAX) com os termos candidatos, utilizou-se o *critério de informação de Akaike* (AIC) (Akaike, 1974a) em conjunto com o *critério da taxa de redução de erro* (ERR⁵) (Aguirre, 2007) para definir o número de regressores e quais regressores seriam mais adequados para descrever o sistema de bombeamento de água. O AIC verifica o número de termos adequados que melhor explica o sistema em questão. Já o ERR permite quantificar a importância de cada regressor individualmente. Desta maneira, foram inclusos os regressores de maior ERR dentre o conjunto de termos candidatos. É importante mencionar que o ERR foi aplicado simultaneamente com a etapa de estimação dos parâmetros.
- Por fim, na etapa de estimação de parâmetros o algoritmo selecionado, como mencionado anteriormente, foi o MQE. Dessa forma, o número de iterações de ruído, tanto para o modelo ARMAX quanto para o modelo NARMAX, ficou definido como 5 para \mathcal{F}_1 e 55 para \mathcal{F}_2 . Como o algoritmo MQE não é o foco deste trabalho e por questões práticas, os parâmetros dos modelos ARX e NARX, desconsiderando o termo MA, não são aqui apresentados.
- Depois que os parâmetros dos modelos foram estimados, verificou-se se os modelos identificados descreviam adequadamente os dados do sistema. Para isso, utilizou-se de testes de validações dinâmicas por simulações livres, validações quantitativas dos desempenhos dos modelos utilizando o índice RMSE⁶ e testes de validações estatísticas que se utilizam de funções de correlação. Todos estes tipos de validações mencionadas, serão apresentadas na Seção 5.3.3.

5.3.3 Validação dos Modelos

Para facilitar a visualização do ajuste dos algoritmos, parte da simulação livre dos modelos lineares, para as duas saídas, é mostrada na Figura 5.7. Verifica-se que esses modelos não conseguem chegar aos picos. Isso se deve ao fato dos ganhos dos sistemas lineares serem fixos.

Contudo, verifica-se que o ARC e o MQE modelam alguns aspectos do comportamento dinâmico do sistema.

Também é utilizada, na validação, a autocorrelação dos resíduos ($r_{\xi\xi}$) e a correlação cruzada dos resíduos com a entrada ($r_{\xi u}$), para os modelos \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 (ARMAX) obtidos pelo MQE, como mostrado na Figura 5.8. Deve-se destacar que não é realizada a análise dos resíduos para o ARC, pois, nesse algoritmo, não há modelo de ruído que garanta que os resíduos sejam brancos. Nessa perspectiva, não seria interessante comparar o ARC com o MQE. Contudo, a análise dos resíduos do MQE-ARMAX serve para indicar se há ou não informação contida nos dados que os modelos não explicam.

⁵Do inglês, *error reduction ratio*.

⁶Raiz do Erro Médio Quadrático.

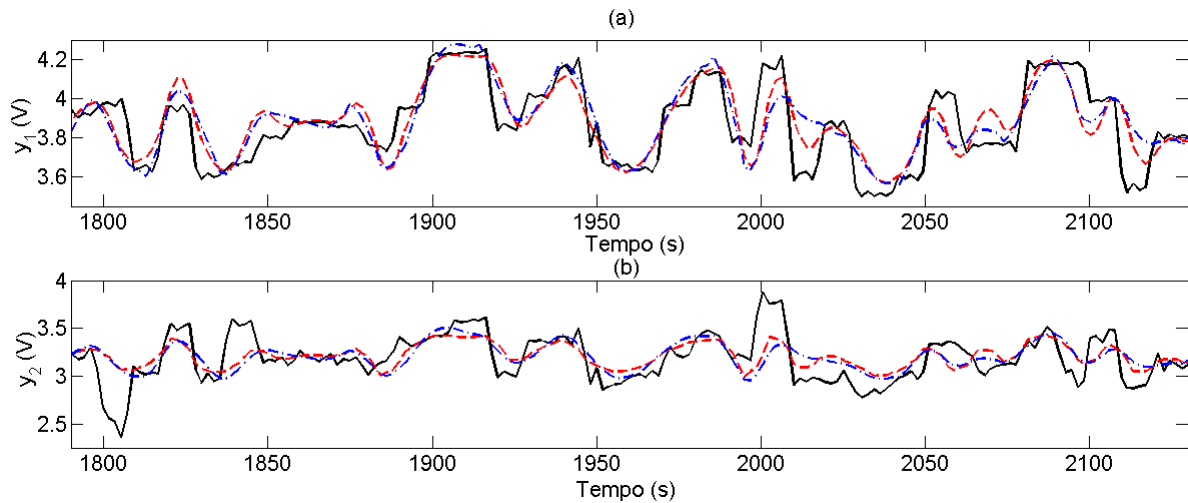


Figura 5.7: Validação dinâmica para os modelos lineares obtidos para a planta de bombeamento de água. (a) y_1 - vazão e (b) y_2 - pressão. (—) dados experimentais de saída, (---) dados estimados pelo MQE-ARX e (· · ·) dados estimados pelo ARC.

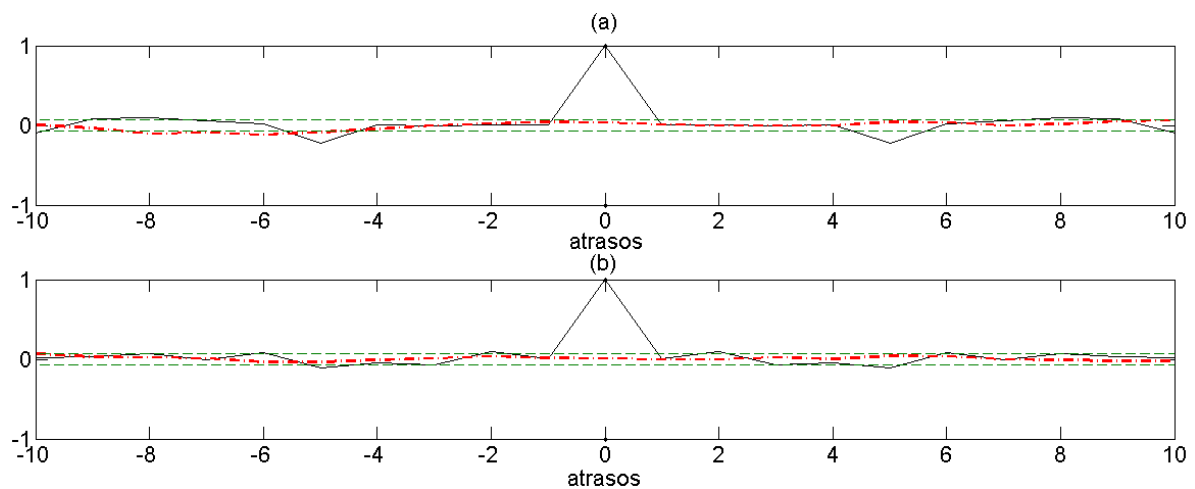


Figura 5.8: Autocorrelação dos resíduos e correlação cruzada dos resíduos com a entrada dos modelos ARMAX (obtidos pelo MQE). (a) \mathcal{F}_1 e (b) \mathcal{F}_2 . Tem-se que (—) $r_{\xi\xi}(\tau)$, (· · ·) $r_{\xi u}(\tau)$ e (- -) intervalo de confiança de 95%.

Dessa análise estatística, na Figura 5.8a, percebe-se que os resíduos do modelo \mathcal{F}_1 possuem uma pequena correlação no atraso $\tau = 5$, isso indica que os estimadores estão levemente polarizados, pois os resíduos não são totalmente brancos. Essa polarização é passível de ser retirada com o aumento da ordem do modelo. Entretanto, para fins de comparação com o ARC manteve-se a ordem igual a 4. Verifica-se que apesar dessa polarização, o modelo \mathcal{F}_1 consegue acompanhar os dados do sistema, com limitações; veja Figura 5.7. Na Figura 5.7b, pode-se

notar que um pico positivo e um negativo aparecem durante o ensaio. Esses picos não podem ser modelados pelos algoritmos (ARC e MQE), pois eles não são resultantes da excitação de entrada. Supõe-se que ao succionar a água do reservatório 1, massas de ar também passam pela tubulação, ocasionando esses eventos. Vale destacar que esses picos aparecem durante todo o ensaio; veja Figura 5.6.

A análise dos resultados dos modelos lineares leva a hipótese de que possivelmente o processo seja não-linear, a tal ponto de impedir um bom ajuste por parte dos modelos lineares. Para testar essa hipótese, modelos NARMAX, foram obtidos. Para avaliar a qualidade dos modelos obtidos, por cada algoritmo, usa-se o índice conhecido como RMSE⁷. Os valores do RMSE para os modelos de vazão e os de pressão, estão mostrados na Tabela 5.2. Nessa análise os termos de ruído (MA) são desconsiderados.

Tabela 5.2: Comparação entre os modelos obtidos para a planta de bombeamento de água.

Algoritmo		NT	RMSE	Ttot(s)	
MQE	L	y_1	6	0,62	0,38
		y_2	6	0,92	
	NL	y_1	10	0,61	1,57
		y_2	9	0,91	
ARC	L	y_1	30	0,64	0,28
		y_2		0,92	

L - linear - ARX e em espaço de estados.
 NL - não-linear - NARX.
 NT - número de termos de processo.
 Ttot(s) - tempo total requerido para estimação em segundos.

Como pode ser visto, a redução dos valores de RMSE dos modelos não-lineares é desprezível. O que leva à rejeição da hipótese de que os dados sejam não-lineares, ou ao menos com não-linearidades representáveis por modelos com grau de não-linearidade até 3. Essa constatação reforça as observações feitas anteriormente sobre certos “saltos” nos sinais medidos. Uma outra análise, por meio de correlações não-lineares ($r_{\xi\xi^2}$ e $r_{\xi^2\xi^2}$), dos modelos ARMAX, é realizada para verificar possíveis não-linearidades nos dados. Constata-se, por meio das Figuras 5.9 e 5.10 que os resíduos dos modelos não apresentam correlações não-lineares significativas. Sendo assim, os modelos lineares obtidos pelo ARC e MQE modelaram a parte explicável contida nos dados. No presente momento, ainda não se sabe a origem de tais “saltos”. Como o estudo proposto é de caráter comparativo, julga-se que tais características não sejam um impedimento. Em trabalhos posteriores, contudo, a origem desses fenômenos deve ser melhor compreendida.

Da Tabela 5.2 observa-se, também, que os modelos obtidos por MQE e pelo SIM possuem desempenho próximo. Apesar do número de termos do ARC ser maior, o tempo de simulação total (Ttot) é cerca de 74% do tempo do MQE-ARMAX e cerca de 18% do tempo do MQE-NARMAX. Dessa análise, verifica-se que o tempo requerido pelo ARC para estimar os parâmetros do modelo em espaço de estados é menor do que o MQE, pois ele não é iterativo. A análise do tempo de estimação dos parâmetros, pelos algoritmos, foi realizada por meio das funções *tic* e *toc* do MATLAB[®].

⁷RMSE - Erro Médio Quadrático.

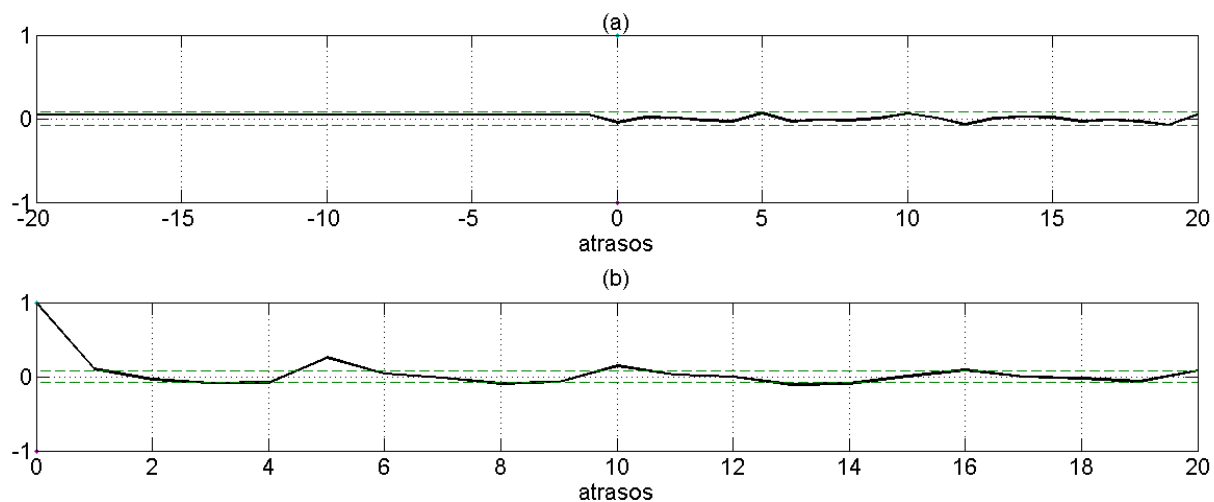


Figura 5.9: Autocorrelações não-lineares dos resíduos do modelo ARMAX obtido pelo MQE para \mathcal{F}_1 . (a) $r_{\xi\xi^2}(\tau)$ e (b) $r_{\xi^2\xi^2}(\tau)$. (- -) intervalo de confiança de 95%.

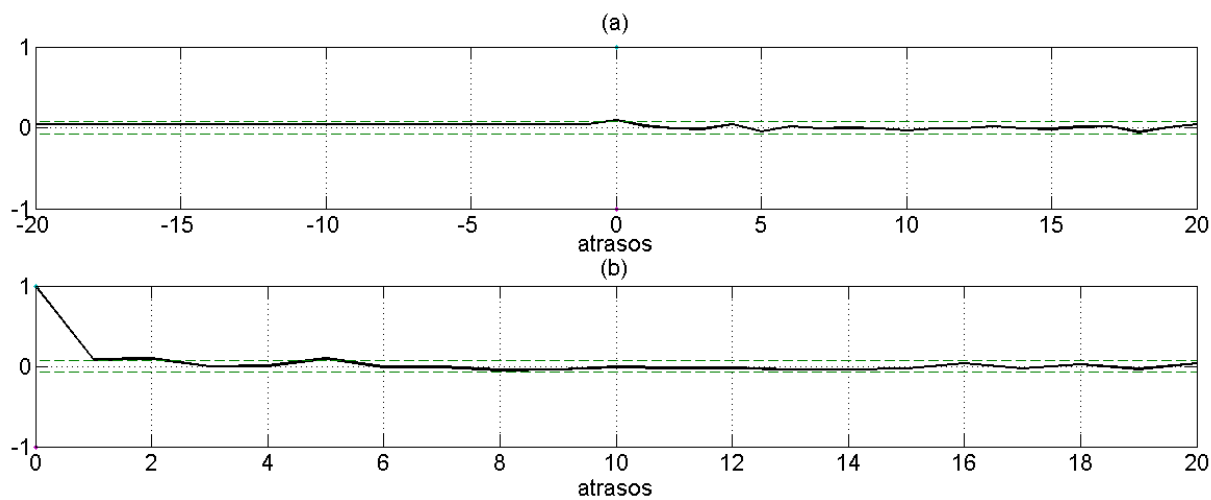


Figura 5.10: Autocorrelações não-lineares dos resíduos do modelo ARMAX obtido pelo MQE para \mathcal{F}_2 . (a) $r_{\xi\xi^2}(\tau)$ e (b) $r_{\xi^2\xi^2}(\tau)$. (- -) intervalo de confiança de 95%.

5.4 Planta Piloto de Flotação em Coluna

O sistema a ser identificado nesta seção trata-se de uma planta piloto de flotação em coluna instalada na Usina Piloto de Tratamento de Minérios da Supervisão de Processos do CDTN ⁸. Esse sistema foi investigado no trabalho de Saraiva (1999). Em Saraiva (1999) são aplicadas técnicas de identificação de sistemas dinâmicos não-lineares na obtenção de modelos NARMAX polinomiais multivariáveis.

O objetivo deste estudo de caso é realizar uma comparação direta entre as performances dos modelos multivariáveis obtidos pelos métodos de predição de erro (PE) e pelos métodos de subespaços (SIM). Vale salientar que os algoritmos de identificação multivariável por MQE foram fornecidos por (Saraiva, 1999). Uma breve discussão a respeito desses algoritmos será realizada mais adiante.

A flotação em coluna é um processo de filtragem pelo qual diferentes partículas minerais são separadas. Tal separação se faz com o uso de reagentes que tornam determinadas partículas hidrofílicas, ao passo que outras ficam hidrofóbicas. No corpo da coluna existe ar, que é injetado na base da mesma. Esse ar flui para o topo da coluna e arrasta consigo as partículas hidrofóbicas, deixando para trás as hidrofílicas (Aguirre, 2007). A esse material, bolhas de ar mais partículas hidrofóbicas, dá-se o nome de *flotado*, as partículas hidrofílicas são chamadas de *não-flotado*. No topo da coluna, em função dos reagentes, forma-se uma camada de espuma cuja altura é de grande importância para a correta operação da mesma. Outra variável importante é a fração volumétrica de ar injetado na coluna. Essa variável é chamada de *hold up*. Ainda, há outras variáveis importantes em um processo de flotação em coluna, no entanto é mais comum, para garantir uma boa operação desse processo, controlar o *hold up* e a altura da camada de espuma (Aguirre, 2007).

A planta piloto, utilizada neste exemplo, é formada por uma coluna construída em material acrílico transparente, possui duas polegadas de diâmetro e 7,2 metros de altura. A Figura 5.11 ilustra como é feito um processo de filtragem por flotação em coluna. Perto da base da coluna é injetado ar livre de contaminações, como partículas sólidas ou óleo. Na seção central (seção de concentração) é bombeada a polpa de minério, que é basicamente pó de minério misturado com água e certos reagentes químicos. Nesta seção ocorre o contato efetivo entre as partículas hidrofóbicas e as bolhas de ar ascendentes, de forma que estas partículas se aderem as bolhas de ar. Finalmente, no topo da coluna é jogada água, com intuito de “lavar” o material flotado que deixa a coluna. O flotado é normalmente descarregado por transbordo, enquanto que o não-flotado é geralmente descarregado por bombeamento ou por efeito de gravidade, com a vazão regulada por meio de uma válvula (Saraiva, 1999; Aguirre, 2007).

⁸Centro de Desenvolvimento de Tecnologia Nuclear.

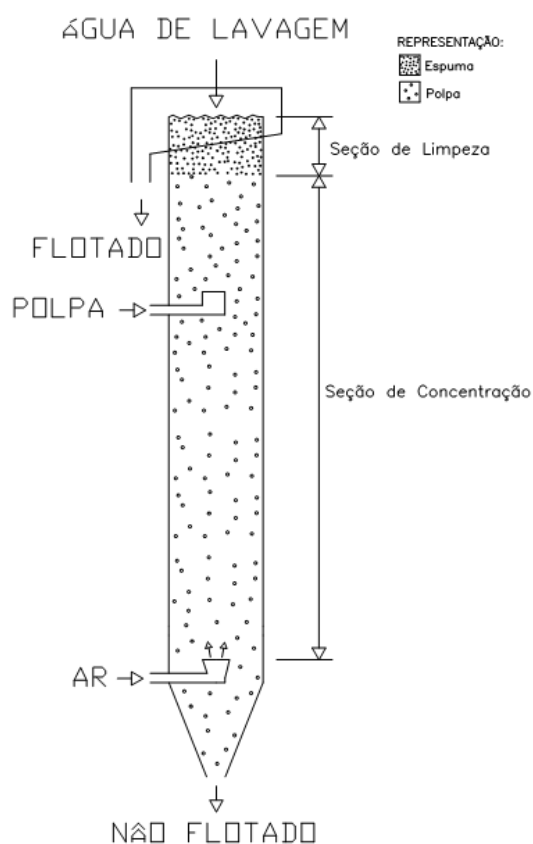


Figura 5.11: Representação esquemática de uma coluna de flotação. Retirado de (Saraiva, 1999).

As variáveis de entradas e saídas dos modelos obtidos dos ensaios de identificação da planta de flotação, foram definidas em função da operação da coluna, bem como da instrumentação disponível. Assim, as variáveis definidas por (Saraiva, 1999) foram as seguintes:

- Entradas:
 - u_1 : sinal de controle de velocidade da bomba do não flotado;
 - u_2 : vazão de água de lavagem;
 - u_3 : vazão de alimentação de ar.
- Saídas:
 - y_1 : pressão no ponto superior na seção de concentração;
 - y_2 : pressão no ponto inferior na seção de concentração.

Com relação às variáveis de saída, como mencionado anteriormente, o ideal seria ter um modelo que fornecesse como saídas a altura da coluna de espuma e o *hold up*. Mas, como tais variáveis não são medidas diretamente com facilidade e precisão, ao invés de mensurá-las, é

comum medir a pressão em dois pontos distintos da coluna, na seção de concentração e a partir desta medição obter a altura da camada de espuma e o *hold up*.

Um exemplo de um processo de filtragem por coluna de flotação é a separação da sílica do minério, o flotado é a sílica enquanto que o minério é o não flotado. Nos resultados apresentados aqui foram utilizados água, ao invés de polpa de minério, e apenas espumante (*Flotanol*), como reagente químico do processo (Saraiva, 1999).

5.4.1 Testes para a Identificação

O teste de identificação foi realizado com uma vazão constante de *flotanol* de 1230 ml/min , com 1% de concentração. Os sinais de entrada de velocidade da bomba de não flotado e vazão de água foram gerados aleatoriamente, mantendo-se um patamar constante por quatro minutos. O sinal de vazão de ar não foi manipulado, as variações de patamares foram consequências da linha de ar que serve a diversos processos (Aguirre, 2007). Os sinais de entrada do teste de identificação da planta piloto podem ser vistos na Figura 5.12.

Os valores dos dados das saídas, correspondentes a pressão nos dois pontos da coluna, podem ser vistos na Figura 5.13. Ainda, vale mencionar que estes dados foram coletados a uma taxa de amostragem de 0,5 Hz e, posteriormente, decimados por um fator de 18. Também, foi utilizado um outro teste dinâmico, para validação dos modelos estimados, obtido em um dia posterior e realizado em condições de operação semelhantes ao primeiro teste. Os dados de entrada e saída, obtidos do teste de validação, podem ser vistos na Figuras 5.14 e 5.15, respectivamente.

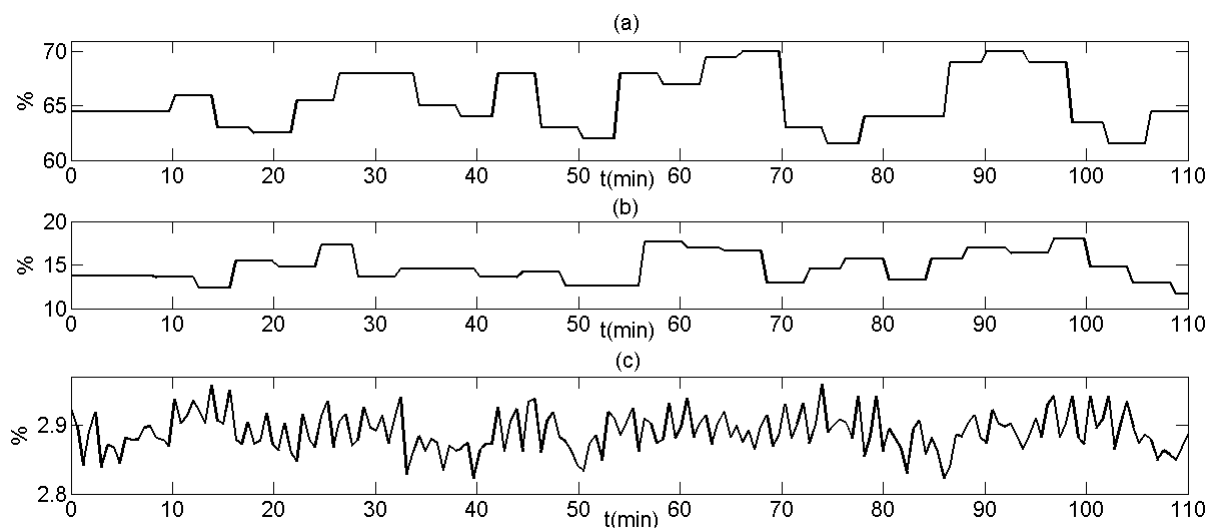


Figura 5.12: Teste de identificação da planta piloto de flotação em coluna, sinais de entrada. Dados fornecidos por (Saraiva, 1999). Sinais de entrada: (a) velocidade da bomba de não flotado ($u_1(k)$), (b) vazão da água de lavagem ($u_2(k)$) e (c) vazão de ar ($u_3(k)$).

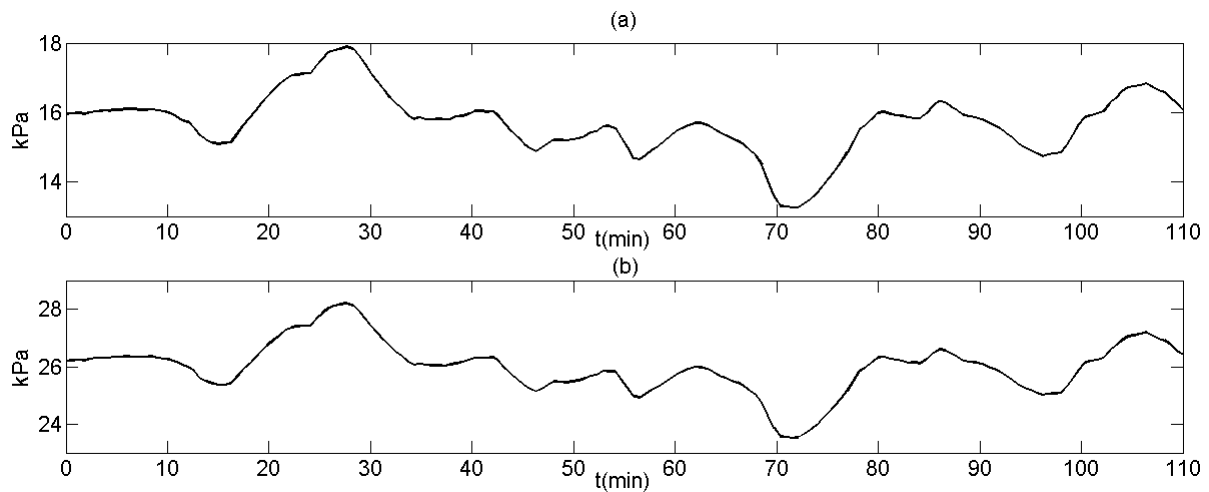


Figura 5.13: Teste de identificação da planta piloto de flotação em coluna, sinais de saída. Dados fornecidos por (Saraiva, 1999). Sinais de saída, pressões da seção de concentração da coluna: (a) ponto superior ($y_1(k)$) e (b) ponto inferior ($y_2(k)$).

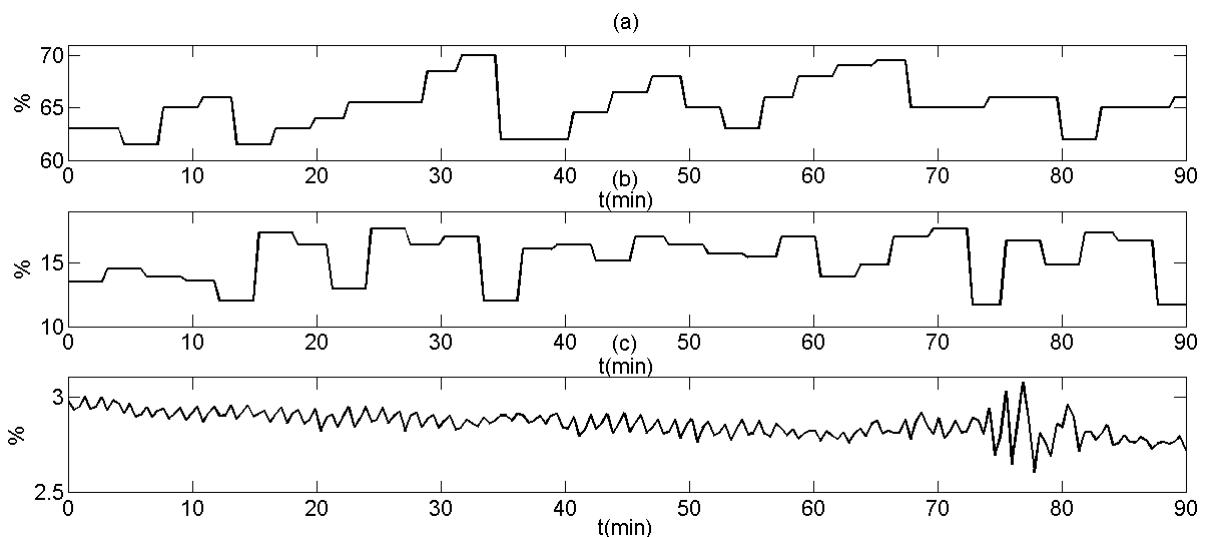


Figura 5.14: Teste de validação da planta piloto de flotação em coluna, sinais de entrada. Dados fornecidos por (Saraiva, 1999). Sinais de entrada: (a) velocidade da bomba de não flotado ($u_1(k)$), (b) vazão da água de lavagem ($u_2(k)$) e (c) vazão de ar ($u_3(k)$).

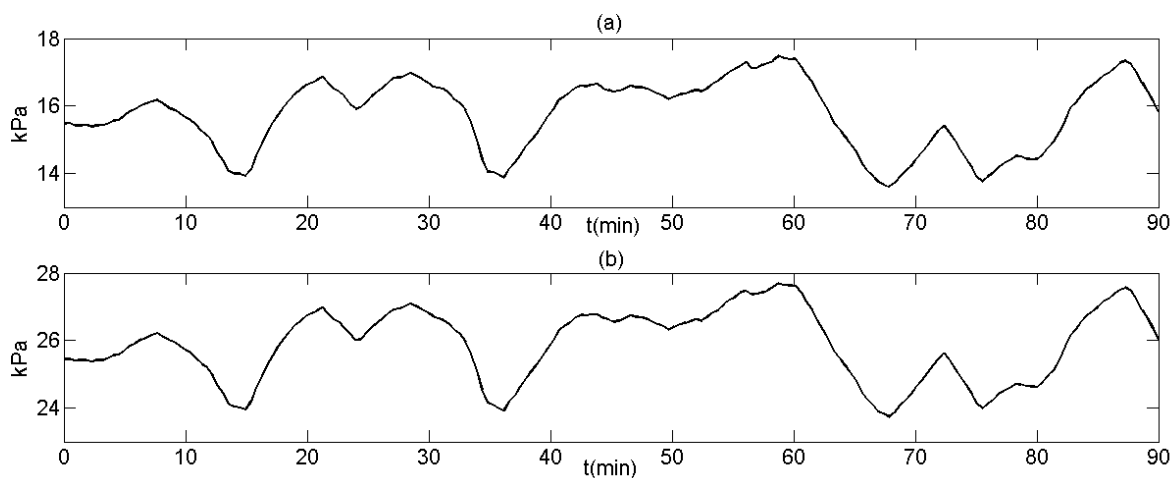


Figura 5.15: Teste de validação da planta piloto de flotação em coluna, sinais de saída. Dados fornecidos por (Saraiva, 1999). Sinais de saída, pressões da seção de concentração da coluna: (a) ponto superior ($y_1(k)$) e (b) ponto inferior ($y_2(k)$).

5.4.2 Identificação do Sistema

Utilizaram-se duas metodologias de identificação multivariável distintas: por subespaços e por predição de erro. No método de identificação por subespaços foram utilizados os algoritmos robusto combinado (ARC), MOESP-PI e MOESP-PO. Por outro lado, no método de predição de erro foi utilizado o MQE.

Para encontrar a ordem dos modelos, para cada um dos algoritmos de subespaços, utilizou-se a metodologia descrita na Seção 4.3. Sendo assim, os gráficos da Figura 5.16 mostram os valores singulares da matriz O_i para cada um dos métodos avaliados.

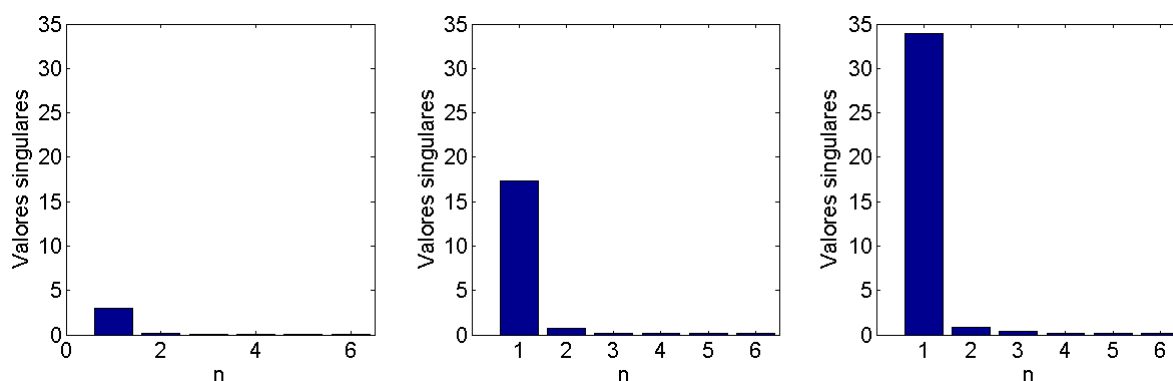


Figura 5.16: Determinação da ordem \hat{n} do sistema a partir dos valores singulares. (a) ARC, (b) MOESP-PI e (c) MOESP-PO.

Pela Figura 5.16 percebe-se que a ordem dos modelos está entre 2 e 3. Para o ARC escolheu-se um modelo de terceira ordem, pois era o que melhor se ajustava aos dados pelo índice RMSE. Assim, os parâmetros estimados são dados por

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0,9993 & -0,0764 & -0,0125 \\ 0,0052 & 0,9323 & 0,3948 \\ -0,0009 & -0,0685 & 0,9251 \end{bmatrix}, \\
 B &= \begin{bmatrix} 0,1187 & -0,1772 & 0,3574 \\ 0,0204 & -0,0574 & -1,7880 \\ -0,0182 & 0,0171 & 0,3917 \end{bmatrix}, \\
 C &= \begin{bmatrix} -0,3851 & -0,1528 & 0,0824 \\ -0,3875 & -0,1508 & 0,0798 \end{bmatrix}, \\
 D &= \begin{bmatrix} -0,0176 & 0,0415 & 0,0635 \\ -0,0163 & 0,0421 & 0,1972 \end{bmatrix}. \tag{5.7}
 \end{aligned}$$

Para os algoritmos MOESP-PI e MOESP-PO os modelos de segunda ordem obtiveram melhor desempenho. Os parâmetros desses modelos são, respectivamente, dados por

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0,9957 & -0,1127 \\ 0,0021 & 0,7686 \end{bmatrix}, \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} 0,0426 & -0,0613 & -0,0479 \\ -0,0005 & -0,0152 & -0,4473 \end{bmatrix}, \\
 C_1 &= \begin{bmatrix} -1,1951 & -0,4338 \\ -1,2357 & -0,4345 \end{bmatrix}, \\
 D_1 &= \begin{bmatrix} -0,0179 & 0,0415 & 0,0926 \\ -0,0175 & 0,0430 & 0,2622 \end{bmatrix}. \tag{5.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \begin{bmatrix} 0,9977 & -0,0877 \\ 0,0029 & 0,8280 \end{bmatrix}, \\
 B_2 &= \begin{bmatrix} 0,0305 & -0,0439 & -0,0396 \\ 0,0006 & -0,0147 & -0,3949 \end{bmatrix}, \\
 C_2 &= \begin{bmatrix} -1,6835 & -0,4497 \\ -1,6988 & -0,4448 \end{bmatrix}, \\
 D_2 &= \begin{bmatrix} -0,0181 & 0,0420 & 0,1083 \\ -0,0172 & 0,0428 & 0,2402 \end{bmatrix}. \tag{5.9}
 \end{aligned}$$

As etapas realizadas para a identificação dos modelos MIMO da planta de flotação em coluna, utilizando o algoritmo MQE, são descritas como segue:

- Sabe-se que um sistema MIMO com m saídas e r entradas é composto de um conjunto de termos formados pela combinação $\{y_1(k), \dots, y_m(k)\}$, $\{u_1(k), \dots, u_r(k)\}$ e $\{e_1(k), \dots, e_m(k)\}$. Sendo assim, de acordo com as entradas (u_1, u_2 e u_3) e saídas (y_1 e y_2) descritas Seção 5.4 definiu-se, no primeiro momento, a estrutura que seria utilizada na composição dos subsistemas. Utilizou-se a estrutura linear ARMAX selecionada por Saraiva (1999) e apresentada em (Aguirre, 2007). Dessa forma, a estrutura dos subsistemas foi selecionada pelo ERR dentre um conjunto de 46 regressores candidatos, com máximos atrasos para os termos de entrada e saída de $n_{u_1} = 5$, $n_{u_2} = 15$, $n_{u_3} = 15$ e $n_{y_1} = 5$, $n_{y_2} = 5$. Portanto, foram selecionados 16 termos para cada subsistema. Na escolha dos atrasos máximos, dos termos candidatos a fazerem parte dos modelos, a faixa de valores foi escolhida, deixando, exclusivamente, a cargo das rotinas de seleção dos termos mais representativos para comporem os modelos (Saraiva, 1999).
- Posto isso, o passo seguinte foi estimar os valores dos parâmetros para cada subsistema utilizando o algoritmo de estimação ortogonal MQE. Sendo que, para cada subsistema, \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , foi utilizada uma parte MA de 7 termos de ruído para reduzir o efeito de polarização dos parâmetros, o máximo atraso estipulado para o regressor de ruído foi de 31.
- Os testes de validação do modelo MIMO, são uma extensão dos testes de modelos SISO, como mencionado na Seção 5.3.2. Por fim, as validações foram realizadas por simulação livre e de forma quantitativa utilizando o índice RMSE. Os parâmetros estimados pelo MQE para os subsistemas ARMAX, \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , sem a parte MA, são apresentados na equação 5.10. As validações obtidas para este modelo podem ser vistas na Seção 5.4.3.

$$\begin{aligned}
 y_1(k) &= 0,5855y_1(k-1) + 0,7976y_1(k-2) + 0,4555y_2(k-4) \\
 &\quad -0,0492u_1(k-1) + 0,0694u_2(k-1) + 0,3338u_3(k-4) \\
 &\quad -0,0055u_2(k-10) - 0,0099u_1(k-5) + 0,4702y_2(k-1) \\
 &\quad -0,4340u_3(k-11) - 0,9274y_2(k-2) - 0,4643y_1(k-4) \\
 &\quad -0,1124u_3(k-12) - 0,4070u_3(k-5) + 0,3827u_3(k-8) \\
 &\quad 0,0651y_1(k-5), \\
 y_2(k) &= 0,9754y_2(k-1) - 0,0792y_2(k-2) + 0,2115u_3(k-7) \\
 &\quad -0,0479u_1(k-1) + 0,0672u_2(k-1) - 0,0089u_2(k-7) \\
 &\quad 0,0898y_1(k-1) - 0,0051u_2(k-15) - 0,0105u_2(k-3) \\
 &\quad -0,3476u_3(k-11) - 0,0083u_2(k-10) + 0,0033u_2(k-11) \\
 &\quad 0,0081u_2(k-8) + 0,0005u_2(k-13) + 0,1732u_3(k-4) \\
 &\quad 0,0350u_3(k-1).
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

5.4.3 Validação dos Modelos

A fim de validar os modelos estimados, foi utilizada a segunda parte do conjunto de dados mostrados na Figura 5.14. Os valores de pressão obtidos por simulação livre dos modelos (5.7), (5.8), (5.9) e (5.10) são mostrados na Figura 5.17.

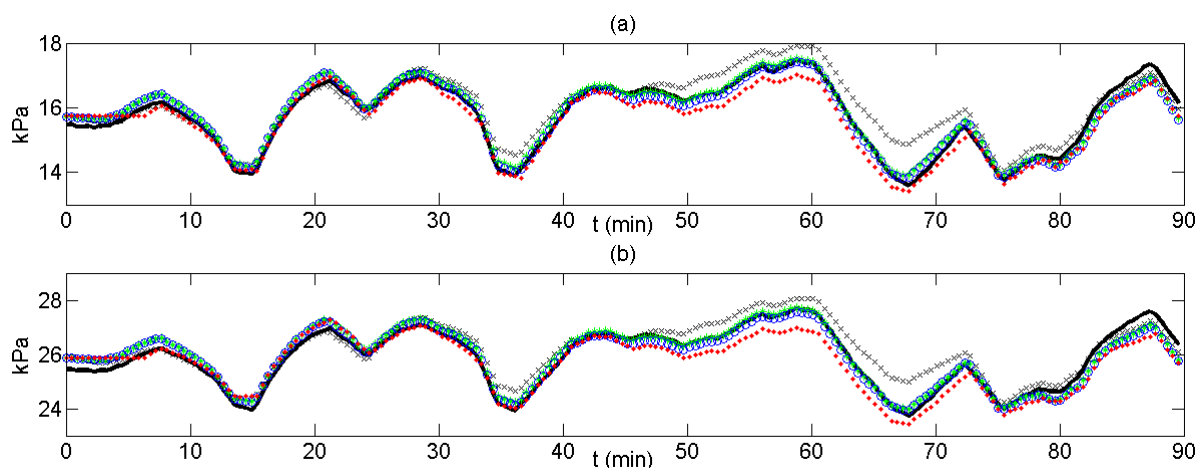


Figura 5.17: Validação dos modelos (5.7), (5.8), (5.9) e (5.10) MIMO. Pressões da seção de concentração da coluna: (a) ponto superior e (b) ponto inferior. (-) em preto, pressões na saída. (●) em vermelho, dados estimados pelo MQE. (×) em preto, dados estimados pelo ARC. (*) em verde, dados estimados pelo MOESP-PI. (o) em azul, dados estimados pelo MOESP-PO.

Pela simulação livre dos modelos pode ser verificado que os modelos que tiveram o melhor desempenho foram os obtidos pelo MOESP-PI e pelo MOESP-PO. Pode-se perceber que eles captaram muito bem a dinâmica dos dados de validação. Deve-se levar em conta que os dados de identificação são independentes dos dados de validação, em outras palavras, eles foram obtidos de ensaios em dias diferentes. A fim de quantificar o desempenho dos métodos lançou-se mão do índice RMSE. Esse índice é apresentado na Tabela 5.3, bem como o número de termos de processo (NT) e o tempo total de estimação ($T_{tot}(s)$) dos algoritmos, nessa análise os termos de ruído (MA) foram desconsiderados. Pelo índices RMSE fica claro que o desempenho dos algoritmos MOESP-PI e MOESP-PO foram equivalentes. Contudo, o tempo de estimação em segundos do MOESP-PO foi cerca de 60% do MOESP-PI. Por outro lado, o ARC foi o algoritmo mais rápido, porém foi o que obteve o pior desempenho, tanto pela simulação livre quanto pelo NT. O MQE obteve um desempenho pouco melhor que o ARC e, além disso, é o que possui menor NT. Entretanto, o $T_{tot}(s)$ foi bem maior.

Pelos resultados preliminares apresentados aqui, acredita-se que o algoritmo mais indicado para modelar a planta de flotação em coluna é o MOESP-PO.

Tabela 5.3: Comparação entre os modelos obtidos para a planta de flotação em coluna.

Algoritmo		NT	RMSE	Ttot(s)
MQE	y_1	16	0,37	0,51
	y_2	16	0,37	
ARC	y_1	30	0,42	0,05
	y_2		0,41	
MOESP-PI	y_1	20	0,20	0,10
	y_2		0,25	
MOESP-PO	y_1	20	0,19	0,06
	y_2		0,24	

NT - número de termos de processo.

Ttot(s) - tempo total requerido, em segundos, para que o MATLAB execute a estimação dos parâmetros do modelo em questão.

Vale salientar que os tempos de estimação dos parâmetros, fornecidos pela Tabela 5.3, foram obtidos de uma média simples de dez simulações.

5.5 Conclusões

No presente capítulo mostrou-se a identificação de vários sistemas por meio de técnicas de subespaços e de predição de erro. Os sistemas em estudo tratam-se de duas plantas experimentais, uma de bombeamento de água e outra de flotação em coluna, e uma planta simulada, um motor de corrente contínua. Dentre as técnicas de subespaços, que retornam modelos em espaço de estados, foram aplicados os algoritmos ARC, MOESP-PI e MOESP-PO. Por outro lado, no método de predição de erro, que fornecem modelos polinomiais do tipo ARMAX e NARMAX, foi utilizado o algoritmo de MQE.

No estudo da planta de bombeamento de água comparou-se os algoritmos ARC e MQE. Nessa planta, na modelagem por MQE obteve-se tanto modelos do tipo ARMAX quanto NARMAX. Na identificação do motor de corrente contínua foram comparados o desempenho dos métodos MOESP-PI, MOESP-PO e MQE-ARMAX. Por fim, é realizado um estudo a respeito dos algoritmos ARC, MOESP-PI, MOESP-PO e MQE-ARMAX aplicados à uma planta de flotação em coluna.

Verificou-se por meio desses estudos de caso que, na maioria dos casos, os métodos de subespaços tiveram desempenho equivalente ou melhor que os de predição de erro, com relação ao tempo de estimação, aos índices de desempenho RMSE e VAF, e à simulação livre. Além disso, um outro fato importante se refere ao número de termos, que na maioria dos estudos, os métodos de subespaços apresentavam mais termos. Entretanto, observou-se que a medida que o número de termos dos métodos de predição aumentavam o tempo de estimação dos modelos aumentava significativamente, o que não ocorria com os métodos de subespaços.

Outros diferenciais dos métodos de subespaços se referem à forma com que os modelos são apresentados e a facilidade de determinar a estrutura das matrizes. A representação em espaços de estados é uma forma muito mais elegante que a representação polinomial por equação de diferenças, ainda mais quando se trata de sistemas multivariáveis. Além do mais, nos métodos de predição de erro são necessárias várias etapas antes da estimação dos parâmetros, enquanto

que nos métodos de subespaços é necessário somente a determinação da ordem do modelo para iniciar a estimação.

Dessa forma, pode-se concluir que os métodos de subespaços são mais competitivos que os métodos de predição de erro no que se refere à identificação de sistemas lineares multivariáveis sob vários aspectos.

Conclusões

“Enquanto existir vontade de lutar, existem esperanças de vencer.”

A. Agostinho

6.1 Introdução

Este capítulo traz de forma resumida os principais pontos abordados e contribuições desse trabalho. Também, são deixadas algumas sugestões de leitura que complementam este texto. Logo após, são apresentadas algumas sugestões de trabalhos futuros que não foram investigados nesse trabalho, mas que merecem ser consideradas.

6.2 Considerações Gerais

Este trabalho trata-se de um primeiro passo na direção de realizar a modelagem de sistemas por meio de métodos de identificação por subespaços no contexto do grupo MACSIN e do programa de pós-graduação PPGEE-UFMG. Para isso, fez-se um estudo detalhado dessas ferramentas e comparou-se os algoritmos estudados entre si e com outras metodologias de identificação. Deve-se salientar que vários trabalhos foram publicados comparando os métodos de subespaços e os métodos mais tradicionais identificação. Trabalhos como os de [Deistler \(1995\)](#), [Paternell \(1996\)](#), [Swindlehurst et al. \(1995\)](#) e [Viberg \(1995\)](#), são excelentes artigos de comparação e complementam a leitura desse trabalho.

Sendo assim, os esforços foram direcionados em investigar as principais técnicas de identificação por subespaços. Contudo, antes de passar aos estudos dos métodos, foi apresentado no [Capítulo 2](#) vários conceitos essenciais para entendimento dos métodos, tais como, interpretação geométrica, projeções, conceitos estatísticos, entre outros. Deve-se ressaltar que o [Apêndice A](#) complementa o [Capítulo 2](#) com algumas definições sobre a teoria de sistemas lineares e álgebra linear.

Logo após nos [capítulos 3 e 4](#) são apresentados os métodos de identificação por subespaços determinísticos e estocásticos, respectivamente. O [Capítulo 3](#) traz diversos conceitos e demonstrações, além de fornecer alguns exemplos de simulação que servem de motivação para o capítulo seguinte, o de identificação estocástica. No [Capítulo 4](#) são apresentadas metodologias de identificação para tratar problemas de ruídos de processo e de medição adicionados aos dados de identificação. Nesse capítulo uma análise minuciosa dos métodos foi realizada por meio

de demonstrações e exemplos. O Apêndice B traz algumas demonstrações que complementam os capítulos 3 e 4.

Por fim, no Capítulo 5 são mostrados os resultados de identificação de dois sistemas experimentais e um simulado. Em cima desses estudos de caso, foi possível verificar a relevância prática das ferramentas de identificação por subespaços.

Acredita-se que este trabalho cumpriu seu papel e fornece uma boa revisão bibliográfica sobre os métodos de subespaços. Dada a abrangência da metodologia, outras áreas de identificação por subespaços, aqui não estudadas, estão em pleno desenvolvimento, tais como, sistemas lineares variantes no tempo, sistemas não-lineares, séries temporais e sistemas em malha fechada. Dentre esses temas, o artigo de [Palanhandalam-Madapusi et al. \(2005\)](#) faz uma boa revisão sobre essas variantes dos métodos de identificação por subespaços. Especificamente [Ljung \(1996\)](#), [Favoreel et al. \(1999\)](#), [Katayama et al. \(2005\)](#) e [Wang e Qin \(2006\)](#) tratam de sistemas em malha fechada, [Goethals et al. \(2005a\)](#), [Goethals \(2005\)](#), [Goethals et al. \(2005b\)](#) e [Lopes dos Santos et al. \(2005\)](#) trabalham com sistemas não-lineares, por sua vez, [Bauer \(2009\)](#) e [Giesbrecht e Bottura \(2010\)](#) discutem como utilizar os métodos de subespaços para aplicações em séries temporais. Essas referências bibliográficas são bons textos para entender o atual estado da arte dos métodos de subespaços.

6.3 Contribuições

As principais contribuições deste trabalho são:

- Revisão bibliográfica detalhada dos métodos de subespaços mais conhecidos da literatura. Acredita-se que nesse trabalho está concentrada a teoria necessária para compreensão dos métodos. Sendo assim, conjectura-se que o material apresentado nesta pesquisa servirá de base para quem desejar iniciar seus estudos na área de identificação por subespaços.
- Os métodos MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO foram implementados em ambiente MATLAB e podem ser utilizados pelos membros do grupo MACSIN em trabalhos posteriores na identificação de sistemas lineares multivariáveis. Deve-se ressaltar que os métodos foram implementados baseados no livro de [Verhaegen e Verdult \(2007\)](#).
- Os métodos MOESP, MOESP-PI, MOESP-PO e ARC foram aplicados a dois sistemas simulados e a dois experimentais. Por meio da identificação desses sistemas tentou-se elucidar os aspectos práticos e teóricos de cada método. Além disso, tais métodos foram comparados com a técnica de MQE linear. Dessa comparação, pode-se concluir que para sistemas lineares multivariáveis os métodos de subespaços são os mais indicados.

6.4 Trabalhos Futuros

Ao longo deste trabalho, identificou-se algumas lacunas que precisam ser preenchidas na teoria de identificação por subespaços e devem ser investigadas. Dentre as mais importantes, pode-se citar:

- As técnicas de identificação por subespaços são baseadas em ferramentas como a decomposição em valores singulares que não é muito eficiente para aplicações *on-line* devido a sua complexidade computacional. É possível utilizar outro tipo de ferramenta de fatoração ou decomposição que reduza o esforço computacional e permita aplicar os métodos *on-line*?
- É possível formular os métodos de subespaços de forma recursiva utilizando-se de conceitos de processamentos de sinais?
- Métodos de identificação recursiva estocástica sem entradas ainda não foram desenvolvidos, buscar uma alternativa para este problema é desafiador. Pois, em aplicações em que ocorram falhas, os sinais de entrada podem ficar indisponíveis, podendo ocasionar perdas de máquinas e provocar acidentes.
- Para aplicações em que deseja-se aplicar o filtro de Kalman não é possível utilizar os métodos de subespaços, pois, os estados estimados estão a uma transformação de similaridade T . Para aplicação do filtro de Kalman é necessário que os estados tenham algum significado físico. Sendo assim, seria de suma importância investigar formas de obter tal matriz transformação de similaridade T .

Referências Bibliográficas

- Aguirre, L. A. (2007). *Introdução à Identificação de Sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. Editora da UFMG, Belo Horizonte, 3ª edição.
- Akaike, H. (1974a). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6):716–723.
- Akaike, H. (1974b). Stochastic theory of minimal realization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6):667–674.
- Barreto, G. (2002). *Modelagem Computacional Distribuída e Paralela de Sistemas e de Séries Temporais Multivariáveis no Espaço de Estado*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - UNICAMP.
- Barreto, G. e Bottura, C. P. (2003). Revisitando os Fundamentos de Identificação Multivariável no Espaço de Estado: II - Idéias Básicas para Métodos de Subespaço:1–10, São José dos Campos, SP. II Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações, 2003 - DINCON 2003
- Bauer, D. (2001). Order estimation for subspace methods. *Automatica*, 37(10):1561–1573.
- Bauer, D. (2009). Estimating ARMAX systems for multivariate time series using the state approach to subspace algorithms. *Journal of Multivariate Analysis*, 100(3):397–421.
- Bernstein, D. S. (2005). *Matrix mathematics: theory, facts, and formulas with application to linear systems theory*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA, 1ª edição.
- Borjas, S. D. M. e Garcia, C. (2004). Modelagem de FCC usando Métodos de Identificação por Predição de Erro e por Sub-Espaços. *IEEE Latin America Transactions*, 2(2):108–113.
- Chen, C.-T. (1998). *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA, 3ª edição.
- Chui, N. L. C. e Maciejowski, J. M. (2005). Subspace identification - a Markov parameter approach. *International Journal of Control*, 78(17):1412–1436.
- Clavijo, D. G. (2002). *Métodos de Subespaços para Identificação de Sistemas: Propostas de Alterações, Implementações e Avaliações*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.

- De Cock, K. e De Moor, B. (2003). Subspace Identification Methods. In *Contribution to section 5.5, "Control systems robotics and automation" of EOLSS, UNESCO Encyclopedia of Life Support Systems: 933–979*, Oxford, UK. Eolss Publishers Co., Ltd.
- De Moor, B. (1988). *Mathematical concepts for modeling of static and dynamic systems*. Tese de Doutorado, Faculty of Engineering, K.U.Leuven (Leuven, Belgium).
- Deistler, M. (1995). Consistency and relative efficiency of subspace methods. *Automatica*, 31(12):1865–1875.
- Favoreel, W. (2000). Subspace state space system identification for industrial processes. *Journal of Process Control*, 10(2-3):149–155.
- Favoreel, W., Moor, B. D., Overschee, P. V., e Gevers, M. (1999). Closed-loop model-free subspace-based LQG-design. *Systems Engineering*:1926–1939.
- Fitzgerald, A. E., Kingsley JR, C., e Kusko, A. (1975). *Máquinas Elétricas - Conversão Eletromecânica da Energia de Processos, Dispositivos e Sistemas*. McGraw-Hill do Brasil LTDA, Brasil.
- Garcia, C. (2005). *Modelagem e simulação de processos industriais e de sistemas eletromecânicos*. EDUSP, São Paulo, 2ª edição.
- Geromel, J. C. e Palhares, A. G. B. (2004). *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos- Teoria, Ensaio Práticos e Exercícios*. Edgard Blücher LTDA, Brasil.
- Giesbrecht, M. e Bottura, C. P. (2010). Uma Proposta Imuno-Inspirada Para A Solução Algébrica Da Equação De Riccati No Problema De Identificacao De Séries Temporais No Espaço De Estado. 2498–2503, Bonito- MS. XVIII CBA - Congresso Brasileiro de Automática.
- Góes, L. C. S. e Tostes, A. S. M. (2003). Identificaãa dos Modos Longitudinal E Lateral-Direcional de Aeronaves de Asa Fixa via Técnicas de Subespaço. volume 2:383–390, São José dos Campos, SP. II Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações, 2003 - DINCON 2003.
- Goethals, I. (2005). *Subspace Identification For Linear , Hammerstein and Hammerstein-Wiener Systems*. Tese de Doutorado, Katholieke Universiteit Leuven.
- Goethals, I., Pelckmans, K., e Suykens, J. (2005a). Subspace identification of Hammerstein systems using least squares support vector machines. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(10):1509–1519.
- Goethals, I., Pelckmans, K., Suykens, J. A. K., e Moor, B. D. (2005b). Identification of MIMO Hammerstein models using least squares support vector machines. *Automatica*, 41(7):1263–1272.
- Ho, B. L. e Kalman, R. E. (1966). Effective construction of linear state - variable models from input/output functions. *Regelungstechnik*, 14(12):545–548.

- Katayama, T. (2005). *Subspace methods for system identification: a realization approach*. Springer, Kyoto, Japan, 1ª edição.
- Katayama, T., Kawauchi, H., e Picci, G. (2005). Subspace identification of closed loop systems by the orthogonal decomposition method. *Automatica*, 41(5):863–872.
- Ljung, L. (1987). *System Identification: Theory for the User*. Prentice-Hall, London.
- Ljung, L. (1996). Subspace identification from closed loop data. *Signal Processing*, 52(2):209–215.
- Ljung, L. e McKelvey, T. (1996). A least squares interpretation of sub-space methods for system identification. *Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control*, (1):335–342.
- Lopes dos Santos, P., Ramos, J., e Martins de Carvalho, J. (2005). Identification of Bilinear Systems Using an Iterative Deterministic-Stochastic Subspace Approach. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*:7120–7126.
- Moberg, S., Ohr, J., e Gunnarsson, S. (2009). A Benchmark Problem for Robust Feedback Control of a Flexible Manipulator. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 17(6):1398–1405.
- Palanthandalam-Madapusi, H., Lacy, S., Hoagg, J., e Bernstein, D. (2005). Subspace-based identification for linear and nonlinear systems. *Proceedings of the 2005, American Control Conference, 2005*:2320–2334.
- Peternell, K. (1996). Statistical analysis of novel subspace identification methods. *Signal Processing*, 52(2):161–177.
- Picci, G. (1996). Stochastic realization with exogenous inputs and ‘subspace-methods’ identification. *Signal Processing*, 52(2):145–160.
- Qin, S. (2006). An overview of subspace identification. *Computers & Chemical Engineering*, 30(10-12):1502–1513.
- Ricco, R. A., Verly, A., Teixeira, B. O. S., e Aguirre, L. A. (2011). Identificação usando técnicas de subespaços de uma planta de bombeamento de Água - um estudo de caso. In *SBAI 2011, São João del-Rei*.
- Saraiva, E. T. S. (1999). *Identificação de uma Planta Piloto de Flotação em Coluna*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEE/UFGM.
- Shim, D. H., Kim, H. J., e Sastry, S. (2000). Control System Design for Rotorcraft-based Unmanned Aerial Vehicles using Time-domain System Identification. *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Control Applications*:808–813.
- Soderstrom, T. e Stoica, P. (1989). *System Identification*. Prentice Hall International.
- Swindlehurst, a., Roy, R., Ottersten, B., e Kailath, T. (1995). A subspace fitting method for identification of linear state-space models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(2):311–316.

- Trnka, P. (2007). *Subspace Identification Methods*. Tese de Doutorado, Czech Technical University in Prague.
- Van Der Veen, J., Deprettere, E., e Swindlehurst, A. (1993). Subspace-based signal analysis using singular value decomposition. *Proceedings of the IEEE*, 81(9):1277–1308.
- Van Overschee, P. (1995). *Subspace Identification: Theory, Implementation, Application*. Tese de Doutorado, Faculty of Engineering, K.U.Leuven (Leuven, Belgium).
- Van Overschee, P. e De Moor, B. (1992). Two subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems. [1992] *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*: 511–516.
- Van Overschee, P. e De Moor, B. (1996). *Subspace identification for linear systems*, volume 2008. Kluwer Academic, Belgium, 1ª edição.
- Van Overschee, P., De Moor, B., e Favoreel, W. (1997). Numerical Algorithms for Subspace State Space System (N4SID). In *Proceedings of DETC'97 - 1997 ASME Design Engineering Technical Conferences:1–9*, Sacramento, California.
- Verhaegen, M. (1994). Identification of the deterministic part of mimo state space models given in innovations form from input-output data. *Automatica*, 30(1):61–74.
- Verhaegen, M. e Dewilde, P. (1992a). Subspace Model Identification. Part I: The Output-Error State Space model identification class of algorithms. *Int. J. Control*, 56(5):1187–1210.
- Verhaegen, M. e Dewilde, P. (1992b). Subspace Model Identification. Part II: Analysis of the elementary Output-Error State Space model identification algorithm. *Int. J. Control*, 56(5):1211–1241.
- Verhaegen, M. e Dewilde, P. (1993). Subspace Model Identification. Part III: Analysis of the ordinary Output-Error State Space model identification algorithm. *Int. J. Control*, 58(3):555–586.
- Verhaegen, M. e Verdult, V. (2007). *Filtering and System Identification - A Least Squares Approach*. Cambridge University Press, USA.
- Viberg, M. (1995). Subspace-based Methods for the Identification of Linear Time-invariant Systems. *Automatica*, 31(12):1835–1851.
- Wang, J. e Qin, S. (2006). Closed-loop subspace identification using the parity space. *Automatica*, 42(2):315–320.
- Wang, J. e Qin, S. J. (2002). A new subspace identification approach based on principal component analysis. *Journal of Process Control*, 12(8):841–855.

Fundamentos de Sistemas Lineares e Álgebra Linear

A.1 Algumas Definições

Definição A. 1. O *produto de Kronecker* de duas matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$, denotado por $A \otimes B$, é a matriz $mp \times nq$ dada por

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{21}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Definição A. 2. O *operador vec* empilha todas as colunas de uma matriz, uma em cima da outra, formando um vetor. Para uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dada por $A = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$, com $a_i \in \mathbb{R}^m$, o vetor mn -dimensional $\text{vec}(A)$ é definido como

$$\text{vec}(A) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Definição A. 3. O produto de Kronecker e o operador vec , combinados, são de grande utilidade para reescrever produtos de matrizes. Dadas matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$, tem-se a seguinte relação

$$\text{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\text{vec}(B). \quad (\text{A.3})$$

Definição A. 4. A *norma de Frobenius* de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é

$$\|A\|_F = \|\text{vec}(A)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} = \sqrt{\text{tr}[A^T A]}, \quad (\text{A.4})$$

sendo que $\text{tr}[\bullet]$ indica o traço da matriz \bullet .

A.2 Lemas

Lema A.2.1. A desigualdade de Sylvester é utilizada com frequência para determinar o posto da matriz AB quando ambas, A e B , tem posto completo n , com $n \leq p$ e $n \leq m$. Considere as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, então

$$\text{posto}(A) + \text{posto}(B) - n \leq \text{posto}(AB) \leq \min(\text{posto}(A), \text{posto}(B)). \quad (\text{A.5})$$

Neste caso, de acordo com (A.5), a desigualdade de Sylvester se torna,

$$n + n - n \leq \text{posto}(AB) \leq \min(n, n), \quad (\text{A.6})$$

assim, $\text{posto}(AB) = n$.

A.3 Decomposições de Matrizes

A.3.1 Decomposição em Valores Singulares

Qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pode ser decomposta como

$$A = USV^T, \quad (\text{A.7})$$

em que $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes ortogonais e, $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ possui somente elementos não-nulos ao longo de sua diagonal. Estes elementos σ_i são ordenados de forma que

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_k = 0, \quad (\text{A.8})$$

em que $r = \text{posto}(A)$ e $k = \min(m, n)$.

Os elementos da diagonal σ_i da matriz S são chamados de *valores singulares* de A , as colunas da matriz U são chamadas de *vetores singulares à esquerda*, e as colunas da matriz V são chamadas de *vetores singulares à direita*. A SVD da matriz A pode ser relacionada com a decomposição dos autovalores de matrizes simétricas do tipo AA^T e $A^T A$, visto que

$$AA^T = USV^T VS^T U^T = USS^T U^T, \quad (\text{A.9})$$

$$A^T A = VS^T U^T USV^T = VS^T SV^T. \quad (\text{A.10})$$

Assim, a matriz U contém todos os autovetores da matriz AA^T , a matriz $m \times m$ SS^T contém os autovalores correspondentes, com r autovalores não-nulos $\sigma_i^2, i = 1, 2, \dots, r$; a matriz V contém os autovetores da matriz $A^T A$, a matriz $n \times n$ $S^T S$ contém os autovalores correspondentes, com r autovalores não-nulos $\sigma_i^2, i = 1, 2, \dots, r$.

Quando uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ possui posto r , tal que $r < m$ e $r < n$, a SVD pode ser particionada como a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

em que $U_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $U_2 \in \mathbb{R}^{m \times (m-r)}$, $S_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $V_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$, e $V_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ (Verhaegen e Verdult, 2007). Por meio desta relação pode-se verificar que as colunas das matrizes U_1 , U_2 , V_1 , e V_2 provêm bases ortogonais para todos os quatro subespaços fundamentais da matriz A , são eles:

$$\begin{aligned} \text{range}(A) &= \text{range}(U_1), \\ \ker(A^T) &= \text{range}(U_2), \\ \text{range}(A^T) &= \text{range}(V_1), \\ \ker(A) &= \text{range}(V_2). \end{aligned}$$

A SVD é uma fatoração numérica confiável. Maiores detalhes sobre o uso da SVD em algoritmos de identificação por subespaços podem ser encontrados em Van Der Veen et al. (1993).

A.3.2 Decomposição QR

Qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pode ser decomposta como

$$A = QR, \tag{A.12}$$

em que $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz ortogonal com $Q^T Q = I_m$, e $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz triangular superior. O termo à direita na equação (A.12) é chamado de decomposição QR de A .

Quando a matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ possui posto r , tal que $r > m$ e $r < n$, a decomposição QR pode ser particionada como a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{A.13}$$

em que $Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{m \times (m-r)}$, $R_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$, e $R_2 \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$. Esta relação mostra que

$$\begin{aligned} \text{range}(A) &= \text{range}(Q_1), \\ \ker(A^T) &= \text{range}(Q_2), \\ \text{range}(A^T) &= \text{range}(R_1^T). \end{aligned} \tag{A.14}$$

A.4 Sistemas Lineares

Um sistema em espaço de estados linear variante no tempo pode ser representado da seguinte forma:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \tag{A.15}$$

$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k), \tag{A.16}$$

com $A(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(k) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(k) \in \mathbb{R}^{l \times n}$ e $D(k) \in \mathbb{R}^{l \times m}$. O sistema (A.15) e (A.16) é chamado de sistema em espaço de estados LVT (linear variante no tempo). Se as matrizes $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$,

e $D(k)$ não dependem do tempo k , o sistema é invariante no tempo. Assim, um sistema em espaço de estados linear invariante no tempo (LIT) pode ser representado da seguinte maneira:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (\text{A.17})$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k). \quad (\text{A.18})$$

Como nesta dissertação o foco é o estudo de sistemas LIT, a parte restante desta seção será dedicada a algumas propriedades desses tipos de sistemas.

A.4.1 Controlabilidade e Observabilidade

Dependendo da natureza do sistema, alguns dos componentes do vetor de estado $x(k)$ podem não ser influenciados pelo vetor de entrada $u(k)$ ao longo do tempo (ver Equação (A.17) e (A.18)). Se a entrada puder ser utilizada para levar todo o estado do sistema para o estado nulo, dentro de um intervalo de tempo finito, o sistema é dito ser controlável. A definição formal de um sistema controlável é a seguinte:

Definição A. 5. Controlabilidade: O sistema LIT (A.17)-(A.18) é *controlável* se, para um dado estado inicial $x(k_a)$, existir um sinal de entrada $u(k)$ para $k_a \leq k \leq k_b$, tal que $x(k_b) = 0$ para algum k_b .

O problema com o conceito de controlabilidade em tempo discreto é que certos sistemas são controláveis mesmo se a entrada não puder ser utilizada para levar o estado do sistema para o estado nulo. Um exemplo simples é um sistema que tem $A = 0$ e $B = 0$; qualquer estado inicial irá a zero. Sendo assim, uma noção maior de controlabilidade, chamada de alcançabilidade, deve ser utilizada.

Definição A. 6. Alcançabilidade: O sistema LIT (A.17)-(A.18) é *alcançável* se para qualquer dois estados, x_a e x_b , existir um sinal de entrada $u(k)$, para $k_a \leq k \leq k_b$, que leva o sistema do estado $x(k_a)$ para o estado $x(k_b)$.

Um exemplo trivial de um sistema não alcançável é um sistema que tem uma equação de estado que não é influenciada pela entrada, como, $x(k+1) = Ax(k)$. A alcançabilidade implica em controlabilidade, mas não necessariamente pode-se dizer que um sistema controlável é um sistema alcançável. Controlabilidade implica em alcançabilidade somente se a matriz A é inversível.

A alcançabilidade de um sistema LIT (A.17)-(A.18) pode ser determinada pelo posto da matriz

$$C_n = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]. \quad (\text{A.19})$$

Na literatura, como em (Chen, 1998), a matriz (A.19) é chamada de matriz de controlabilidade. Entretanto, *matriz de alcançabilidade* é mais apropriado. Por questões didáticas, neste trabalho adotou-se a denominação *matriz de controlabilidade*, que é a mais utilizada .

Lema A.4.1. Condição de Posto de Alcançabilidade: O sistema LIT (A.17)-(A.18) é *alcançável* se e somente se

$$\text{posto}(C_n) = n. \quad (\text{A.20})$$

Prova : A resposta de um sistema LIT em um instante k para um dado estado inicial, $x(0)$, e um sinal de entrada de duração de tempo de 0 a k , pode ser encontrada a partir das equações de estados recursivas:

$$\begin{aligned} x(1) &= Ax(0) + Bu(0), \\ x(2) &= A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1), \\ x(3) &= A^3x(0) + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2), \\ &\vdots \\ x(k) &= A^kx(0) + A^{k-1}Bu(0) + \dots + ABu(k-2) + Bu(k-1). \end{aligned}$$

Ou, equivalentemente, a resposta do instante de tempo k ao instante $k + j$ é dada por,

$$x(k+j) = A^kx(j) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i+j). \quad (\text{A.21})$$

Sendo assim, reescrevendo (A.21),

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}}_{C_n} \begin{bmatrix} u(j+n-1) \\ u(j+n-2) \\ \vdots \\ u(j) \end{bmatrix} = x(j+n) - A^n x(j). \quad (\text{A.22})$$

Se a condição de posto para C_n é satisfeita, pode-se determinar uma sequência de entrada que leva o sistema do estado $x(j)$ para o estado $x(j+n)$, como segue:

$$\begin{bmatrix} u(j+n-1) \\ u(j+n-2) \\ \vdots \\ u(j) \end{bmatrix} = C_n^T (C_n C_n^T)^{-1} (x(j+n) - A^n x(j)). \quad (\text{A.23})$$

□

A Equação (A.18) mostra que a saída do sistema está relacionada com o estado do sistema, mas o estado não é diretamente observável. Se existe uma relação única no tempo entre o estado e a saída, o sistema é chamado de observável.

Definição A. 7. Observabilidade: O sistema LIT (A.17)-(A.18) é *observável* se qualquer estado inicial $x(k_a)$ é unicamente determinado por sua correspondente resposta a entrada nula $y(k)$, para $k_a \leq k \leq k_b$ com um k_b finito.

Um exemplo trivial de um sistema não observável é um sistema que tem uma equação de saída que não é influenciada pelo estado, como, $y(k) = Du(k)$. A matriz de observabilidade é dada por:

$$O_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.24})$$

Lema A.4.2. Condição de Posto de Observabilidade: O sistema LIT (A.17)-(A.18) é observável se e somente se

$$\text{posto}(O_n) = n. \quad (\text{A.25})$$

Prova : Usando a Equação (A.21) para encontrar a resposta $y(k)$ a entrada nula,

$$O_n x(j) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(j) = \begin{bmatrix} y(j) \\ y(j+1) \\ y(j+2) \\ \vdots \\ y(j+n-1) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

Se há condição de posto de observabilidade, pode-se determinar o estado inicial $x(j)$ exclusivamente a partir de $y(j), y(j+1), \dots, y(j+n-1)$, como segue:

$$x(j) = (O_n^T O_n)^{-1} O_n^T \begin{bmatrix} y(j) \\ y(j+1) \\ y(j+2) \\ \vdots \\ y(j+n-1) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

□

Conclui-se a discussão sobre alcançabilidade e observabilidade por meio da definição de minimalidade.

Definição A. 8. Minimalidade: O sistema LIT (A.17)-(A.18) é *mínimo* se ele é ao mesmo tempo alcançável e observável.

A dimensão do vetor de estado $x(k)$ de um sistema LIT (A.17)-(A.18) que seja mínimo é chamada de ordem do sistema LIT.

Demonstrações

B.1 Demonstração - Equações Matriciais Entrada-Saída

Num primeiro momento será provada a equação (3.3). Portanto, considere o vetor de saídas que varia de k até $k + i - 1$:

$$\mathbf{y}_k = [y_k \ y_{k+1} \ \cdots \ y_{k+i-1}]^T, \quad (\text{B.1})$$

em que $i > n$. Assim, de (3.2), tem-se que:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= Cx_{k+1} + Du_{k+1} = C(Ax_k + Bu_k) + Du_{k+1} \\ &= CAx_k + \begin{bmatrix} CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

e,

$$x_{k+2} = Ax_{k+1} + Bu_{k+1} = A(Ax_k + Bu_k) + Bu_{k+1} = A^2x_k + ABu_k + Bu_{k+1}, \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= Cx_{k+2} + Du_{k+2} = C(A^2x_k + ABu_k + Bu_{k+1}) + Du_{k+2} \\ &= CA^2x_k + \begin{bmatrix} CAB & CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ u_{k+2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Seguindo o mesmo procedimento até $k + i - 1$, obtém-se:

$$y_{k+i-1} = CA^{i-1}x_k + \begin{bmatrix} CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \cdots & CB & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ u_{k+2} \\ \vdots \\ u_{k+i-2} \\ u_{k+i-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Colocando as equações (3.2), (B.2), (B.4) e (B.5) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ \vdots \\ y_{k+i-1} \end{bmatrix}_{li \times 1} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}_{li \times n} [x_k]_{n \times 1} + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \cdots & D \end{bmatrix}_{li \times mi} \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ u_{k+2} \\ \vdots \\ u_{k+i-1} \end{bmatrix}_{mi \times 1}. \quad (\text{B.6})$$

Empregando-se notação de matriz de observabilidade estendida (2.18) e de matriz em blocos triangular inferior de Toeplitz (2.21), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ y_{k+2} \\ \vdots \\ y_{k+i-1} \end{bmatrix} = \Gamma_i x_k + H_i^d \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ u_{k+2} \\ \vdots \\ u_{k+i-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Em seguida, varia-se k de 0 a $j-1$, como a seguir:

$$\begin{aligned} \text{Para } k=0, \text{ então } & \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{i-1} \end{bmatrix} = \Gamma_i x_0 + H_i^d \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{i-1} \end{bmatrix}, \\ \text{Para } k=1, \text{ então } & \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_i \end{bmatrix} = \Gamma_i x_1 + H_i^d \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix}, \\ \text{Para } k=j-1, \text{ então } & \begin{bmatrix} y_{j-1} \\ y_j \\ y_{j+1} \\ \vdots \\ y_{i+j-2} \end{bmatrix} = \Gamma_i x_{j-1} + H_i^d \begin{bmatrix} u_{j-1} \\ u_j \\ u_{j+1} \\ \vdots \\ u_{i+j-2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Expressando essas equações em matrizes de blocos, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{j-1} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_j \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{i-1} & y_i & \cdots & y_{i+j-2} \end{bmatrix} = \Gamma_i \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{j-2} & x_{j-1} \end{bmatrix} + \\
+ H_i^d \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{j-1} \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_j \\ u_2 & u_3 & \cdots & u_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_{i-1} & u_i & \cdots & u_{i+j-2} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

Portanto, pode-se concluir que:

$$Y_p = \Gamma_i X_p + H_i^d U_p.$$

Agora será provada a equação (3.4). Considere o seguinte vetor de saídas que varia de $k+i$ até $k+2i-1$:

$$\mathbf{y}_{k+i} = [y_{k+i} \ y_{k+i+1} \ \cdots \ y_{k+2i-1}]^T, \quad (\text{B.9})$$

em que $i > n$. Seguindo o mesmo raciocínio utilizado para provar (3.3), fazendo-se substituições sucessivas para cada medida do vetor \mathbf{y}_{k+i} , obtém-se:

$$\begin{bmatrix} y_{k+i} \\ y_{k+i+1} \\ y_{k+i+2} \\ \vdots \\ y_{k+2i-1} \end{bmatrix}_{li \times 1} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}_{li \times n} [x_{k+i}]_{n \times 1} + \\
+ \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \cdots & D \end{bmatrix}_{li \times mi} \begin{bmatrix} u_{k+i} \\ u_{k+i+1} \\ u_{k+i+2} \\ \vdots \\ u_{k+2i-1} \end{bmatrix}_{mi \times 1}. \quad (\text{B.10})$$

Variando-se k de 0 a $j-1$ e expressando as equações resultantes na forma de matrizes de blocos, resulta em:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_i & y_{i+1} & \cdots & y_{i+j-1} \\ y_{i+1} & y_{i+2} & \cdots & y_{i+j} \\ y_{i+2} & y_{i+3} & \cdots & y_{i+j+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & \cdots & y_{2i+j-2} \end{bmatrix} &= \Gamma_i \begin{bmatrix} x_i & x_{i+1} & \cdots & x_{i+j-2} & x_{i+j-1} \end{bmatrix} + \\
&+ H_i^d \begin{bmatrix} u_i & u_{i+1} & \cdots & u_{i+j-1} \\ u_{i+1} & u_{i+2} & \cdots & u_{i+j} \\ u_{i+2} & u_{i+3} & \cdots & u_{i+j+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_{2i-1} & u_{2i} & \cdots & u_{2i+j-2} \end{bmatrix}. \tag{B.11}
\end{aligned}$$

Dessa forma, conclui-se que:

$$Y_f = \Gamma_i X_f + H_i^d U_f.$$

Por fim, será provada a equação (3.5). Expandindo-se a equação (3.1), obtém-se:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \tag{B.12}$$

$$x_{k+2} = A^2x_k + ABu_k + Bu_{k+1}, \tag{B.13}$$

$$x_{k+3} = A^3x_k + A^2Bu_k + ABu_{k+1} + Bu_{k+2}, \tag{B.14}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$x_{k+i-1} = A^{i-1}x_k + A^{i-2}Bu_k + A^{i-3}Bu_{k+1} + \dots + ABu_{k+i-3} + Bu_{k+i-2}, \tag{B.15}$$

$$x_{k+i} = A^ix_k + A^{i-1}Bu_k + A^{i-2}Bu_{k+1} + \dots + ABu_{k+i-2} + Bu_{k+i-1}. \tag{B.16}$$

A equação (B.16) pode ser expressa como a seguir:

$$x_{k+i} = \begin{bmatrix} A^i \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} x_k \end{bmatrix}_{n \times 1} + \begin{bmatrix} A^{i-1}B & A^{i-2}B & \cdots & AB & B \end{bmatrix}_{n \times mi} \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+i-2} \\ u_{k+i-1} \end{bmatrix}_{mi \times 1}. \tag{B.17}$$

Empregando-se notação de matriz de controlabilidade estendida (2.19), obtém-se:

$$x_{k+i} = A^ix_k + \Delta_i^d \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+i-2} \\ u_{k+i-1} \end{bmatrix}. \tag{B.18}$$

Variando-se k de 0 a $j-1$, obtém-se a seguinte equação na forma de matrizes de blocos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_i & x_{i+1} & \cdots & x_{i+j-2} & x_{i+j-1} \end{bmatrix} &= A^i \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{j-2} & x_{j-1} \end{bmatrix} + \\ &+ \Delta_i^d \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{j-1} \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_j \\ u_2 & u_3 & \cdots & u_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_{i-1} & u_i & \cdots & u_{i+j-2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Portanto a equação (B.19), pode ser expressa como (3.5):

$$X_f = A^i X_p + \Delta_i^d U_p.$$

□

B.2 Demonstração - Teorema 3.6.1

Deseja-se escrever os estados futuros X_f como uma combinação linear dos dados de entradas passadas e futuras. Isto pode ser obtido relacionando as equações (3.3) e (3.5). Para este desenvolvimento é necessário explicitar os X_p na equação (3.5) para, então, substituí-los na equação (3.3). Contudo, a matriz $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{l_i \times n}$ não é quadrada, portanto não pode ser invertida. Sendo assim, pré-multiplicando a equação (3.3) por Γ_i^T de ambos os lados, resulta em

$$\Gamma_i^T Y_p = \Gamma_i^T \Gamma_i X_p + \Gamma_i^T H_i^d U_p. \quad (\text{B.20})$$

Reorganizando (B.20), obtém-se

$$\Gamma_i^T \Gamma_i X_p = \Gamma_i^T Y_p - \Gamma_i^T H_i^d U_p. \quad (\text{B.21})$$

Tem-se que o produto de uma matriz pela sua transposta é uma matriz quadrada, supondo-se que $[\Gamma_i^T \Gamma_i]$ seja não singular, obtém-se a seguinte expressão

$$X_p = [\Gamma_i^T \Gamma_i]^{-1} \Gamma_i^T Y_p - [\Gamma_i^T \Gamma_i]^{-1} \Gamma_i^T H_i^d U_p. \quad (\text{B.22})$$

A matriz $[\Gamma_i^T \Gamma_i]^{-1} \Gamma_i^T$ é conhecida como matriz pseudo-inversa de Moore-Penrose de Γ_i e é denotada por $\Gamma_i^\dagger \triangleq [\Gamma_i^T \Gamma_i]^{-1} \Gamma_i^T$. Então a equação (B.22) pode ser reescrita como

$$X_p = \Gamma_i^\dagger Y_p - \Gamma_i^\dagger H_i^d U_p. \quad (\text{B.23})$$

Logo, substituindo-se (B.23) em (3.5), obtém-se:

$$\begin{aligned} X_f &= A^i (\Gamma_i^\dagger Y_p - \Gamma_i^\dagger H_i^d U_p) + \Delta_i^d U_p, \\ &= (\Delta_i^d - A^i \Gamma_i^\dagger H_i^d) U_p + (A^i \Gamma_i^\dagger) Y_p. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Por fim, colocando (B.24) na forma de matriz, tem-se que:

$$X_f = \begin{bmatrix} \Delta_i^d - A^i \Gamma_i^\dagger H_i^d & A^i \Gamma_i^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_p \\ Y_p \end{bmatrix}. \quad (\text{B.25})$$

Como mostrado na equação (B.25) os estados futuros estão contidos nos dados de entradas e saídas passados. Agora, será mostrado que estes estados não estão somente contidos nos dados de entradas e saídas passadas, mas também nos dados de entradas e saídas futuras. Essa demonstração, naturalmente, mostra como os estados são obtidos por meio dos dados medidos. De (B.25), pode-se fazer a seguinte analogia

$$X_f = L_p W_p, \quad (\text{B.26})$$

com

$$L_p = \begin{bmatrix} \Delta_i^d - A^i \Gamma_i^\dagger H_i^d & A^i \Gamma_i^\dagger \end{bmatrix}. \quad (\text{B.27})$$

Sendo assim, a equação (3.4) pode-ser reescrita como:

$$Y_f = \Gamma_i L_p W_p + H_i^d U_f. \quad (\text{B.28})$$

Aplicando a projeção ortogonal sobre o complemento ortogonal do espaço linha da matriz U_f em Y_f , tem-se:

$$Y_f \Pi_{U_f^\perp} = \Gamma_i L_p W_p \Pi_{U_f^\perp} + H_i^d U_f \Pi_{U_f^\perp}. \quad (\text{B.29})$$

Deve ser notado que $U_f \Pi_{U_f^\perp} = U_f (I - \Pi_{U_f}) = U_f - U_f \Pi_{U_f} = U_f - U_f = 0$. Portanto, a equação (B.29) torna-se

$$\begin{aligned} Y_f \Pi_{U_f^\perp} &= \Gamma_i L_p W_p \Pi_{U_f^\perp}, \\ Y_f / U_f^\perp &= \Gamma_i L_p W_p / U_f^\perp. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Pós-multiplicando-se ambos os lados de (B.30) por $\left[W_p / U_f^\perp \right]^\dagger W_p$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \left[Y_f / U_f^\perp \right] \left[W_p / U_f^\perp \right]^\dagger W_p &= \Gamma_i L_p \left[W_p / U_f^\perp \right] \left[W_p / U_f^\perp \right]^\dagger W_p \\ &= \Gamma_i L_p W_p. \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Substituindo-se (B.26) em (B.31), obtém-se:

$$\left[Y_f / U_f^\perp \right] \left[W_p / U_f^\perp \right]^\dagger W_p = \Gamma_i X_f. \quad (\text{B.32})$$

Comparando a equação (B.32) com a equação (2.52), verifica-se que a mesma é uma projeção oblíqua, portanto:

$$\left[Y_f / U_f^\perp \right] \left[W_p / U_f^\perp \right]^\dagger W_p = Y_f / U_f W_p. \quad (\text{B.33})$$

Relacionando a equação definida em (3.15) com (B.33), verifica-se que a equação (B.32) pode ser escrita como:

$$O_i = \Gamma_i X_f.$$

Dessa forma a primeira assertiva do Teorema 3.6.1 foi provada. Para provar a segunda assertiva, pré-multiplica-se $O_i = \Gamma_i X_f$ por W_1 e pós-multiplica-se por W_2 , obtendo-se:

$$[W_1]_{li \times li} [O_i]_{li \times j} [W_2]_{j \times j} = \underbrace{[W_1]_{li \times li} [\Gamma_i]_{li \times n}}_{li \times n} \underbrace{[X_f]_{n \times j} [W_2]_{j \times j}}_{n \times j}. \quad (\text{B.34})$$

Como pode ser observado na equação (B.34) a matriz $W_1 O_i W_2$ é igual ao produto de duas matrizes, $W_1 \Gamma_i$ (n colunas) e $X_f W_2$ (n linhas). Pela hipótese 3 do Teorema 3.6.1 pode se dizer que ambas as matrizes possuem posto n , por conseguinte o produto delas também terá posto n . Portanto, tem-se que a ordem do sistema é n e se prova a segunda assertiva do teorema. Por meio desta afirmação e de (3.17) pode-se reescrever a equação (B.34) como a seguir:

$$\underbrace{[W_1]_{li \times li} [\Gamma_i]_{li \times n}}_{li \times n} \underbrace{[X_f]_{n \times j} [W_2]_{j \times j}}_{n \times j} = \underbrace{[U_1]_{li \times n} [S_1^{1/2}]_{n \times n}}_{li \times n} \underbrace{[S_1^{1/2}]_{n \times n} [V_1]_{n \times j}^T}_{n \times j}. \quad (\text{B.35})$$

A equação (B.35) pode ser dividida em duas partes (em que $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz arbitrária não-singular representando uma transformação de similaridade):

$$[W_1]_{li \times li} [\Gamma_i]_{li \times n} = [U_1]_{li \times n} [S_1^{1/2}]_{n \times n} [T]_{n \times n} \mathbf{e}, \quad (\text{B.36})$$

$$[X_f]_{n \times j} [W_2]_{j \times j} = [T^{-1}]_{n \times n} [S_1^{1/2}]_{n \times n} [V_1^T]_{n \times j}, \quad (\text{B.37})$$

que leva a terceira e quarta assertiva do Teorema 3.6.1. Agora, pré-multiplicando-se a equação (3.18) de ambos os lados pela pseudo-inversa de Γ_i , obtém-se a prova da quinta assertiva:

$$X_f = \Gamma_i^\dagger O_i.$$

□

Rotinas Computacionais

O presente trabalho teve como uma de suas etapas o desenvolvimento de funções no MATLAB para identificação de sistemas lineares multivariáveis. A seguir são apresentadas as funções implementadas dos métodos de identificação por subespaços MOESP, MOESP-PI e MOESP-PO. A descrição e a função do método ARC, também estudado neste trabalho, podem ser obtidas na página: <http://homes.esat.kuleuven.be/~smc/sysid/software/>.

C.1 moesp

Sintaxe

$[A, B, C, D, SS] = \text{moesp}(u, y, n, k);$

Descrição

O algoritmo `moesp` estima as matrizes de modelos na representação espaço de estados sem tratar ruído de processo e/ou de medição. Também pode ser utilizado para determinar a ordem do sistema.

Dados de Entrada

$u \rightarrow$ matriz de dados medidos das entradas do sistema;

$y \rightarrow$ matriz de dados medidos das saídas do sistema;

$n \rightarrow$ ordem escolhida para o modelo do sistema;

$k \rightarrow$ número de linhas da matriz em blocos de Hankel, este número é definido como $k = 2(\text{maxord}/\text{nusaida})$. Em que, `maxord` é a máxima ordem que o usuário pressupõe que o sistema tenha enusaida é o número de saídas que o sistema possui. Esta relação é definida de forma empírica por (Van Overschee e De Moor, 1996).

Dados de Saída

A → matriz dinâmica estimada para o sistema em espaço de estados;

B → matriz de entrada estimada para o sistema em espaço de estados;

C → matriz de saída estimada para o sistema em espaço de estados;

D → matriz de transmissão direta estimada para o sistema em espaço de estados;

SS → matriz de valores singulares da projeção oblíqua, utilizada para determinar a ordem do sistema;

Algoritmo

Nesse algoritmo a seguinte decomposição LQ é feita:

$$\begin{pmatrix} U_f \\ Y_f \end{pmatrix} = LQ^T = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

Da SVD de L_{22} é estimada a ordem \hat{n} do sistema. Do espaço coluna da SVD de L_{22} é obtida a projeção oblíqua O_i . Por meio dessa projeção são estimadas as matrizes \hat{A} e \hat{C} . Por fim, como mostrado na Seção 3.7 as matrizes \hat{B} e \hat{D} são estimadas resolvendo-se um problema de mínimos quadrados.

C.2 moesp_pi

Sintaxe

`[A,B,C,D,SS]=moesp_pi(u,y,n,k);`

Descrição

O algoritmo `moesp_pi` estima as matrizes de modelos na representação espaço de estados sem tratar ruído de processo. Também pode ser utilizado para determinar a ordem do sistema.

Dados de Entrada

u → matriz de dados medidos das entradas do sistema;

y → matriz de dados medidos das saídas do sistema;

n → ordem escolhida para o modelo do sistema;

k → número de linhas da matriz em blocos de Hankel, este número é definido como $k = 2(\text{maxord}/\text{nusaida})$. Em que, maxord é a máxima ordem que o usuário pressupõe que o sistema tenha e nusaida é o número de saídas que o sistema possui. Esta relação é definida de forma empírica por (Van Overschee e De Moor, 1996).

Dados de Saída

A → matriz dinâmica estimada para o sistema em espaço de estados;

B → matriz de entrada estimada para o sistema em espaço de estados;

C → matriz de saída estimada para o sistema em espaço de estados;

D → matriz de transmissão direta estimada para o sistema em espaço de estados;

SS → matriz de valores singulares da projeção oblíqua, utilizada para determinar a ordem do sistema;

Algoritmo

Nesse algoritmo a seguinte decomposição LQ é feita:

$$\begin{pmatrix} U_f \\ U_p \\ Y_f \end{pmatrix} = LQ^T = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{pmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

Da SVD de L_{32} é estimada a ordem \hat{n} do sistema. Do espaço coluna da SVD de L_{32} é obtida a projeção oblíqua O_i . Por meio dessa projeção são estimadas as matrizes \hat{A} e \hat{C} . Por fim, como mostrado na Seção 4.5 as matrizes \hat{B} e \hat{D} são estimadas resolvendo-se um problema de mínimos quadrados.

C.3 moesp_po

Sintaxe

`[A, B, C, D, SS]=moesp_po(u, y, n, k);`

Descrição

O algoritmo `moesp_po` estima as matrizes de modelos na representação espaço de estados para sistemas com ruído de processo e de medição colorido. Também pode ser utilizado para determinar a ordem do sistema.

Dados de Entrada

u → matriz de dados medidos das entradas do sistema;

y → matriz de dados medidos das saídas do sistema;

n → ordem escolhida para o modelo do sistema;

k → número de linhas da matriz em blocos de Hankel, este número é definido como $k = 2(\text{maxord}/\text{nusaida})$. Em que, maxord é a máxima ordem que o usuário pressupõe que o sistema tenha e nusaida é o número de saídas que o sistema possui. Esta relação é definida de forma empírica por (Van Overschee e De Moor, 1996).

Dados de Saída

A → matriz dinâmica estimada para o sistema em espaço de estados;

B → matriz de entrada estimada para o sistema em espaço de estados;

C → matriz de saída estimada para o sistema em espaço de estados;

D → matriz de transmissão direta estimada para o sistema em espaço de estados;

SS → matriz de valores singulares da projeção oblíqua, utilizada para determinar a ordem do sistema;

Algoritmo

Nesse algoritmo a seguinte decomposição LQ é feita:

$$\begin{pmatrix} U_f \\ U_p \\ Y_p \\ Y_f \end{pmatrix} = LQ^T = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \\ Q_4^T \end{pmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

Da SVD de $[L_{42} \ L_{43}]$ é estimada a ordem \hat{n} do sistema. Do espaço coluna da SVD de $[L_{42} \ L_{43}]$ é obtida a projeção oblíqua O_i . Por meio dessa projeção são estimadas as matrizes \hat{A} e \hat{C} . Por fim, como mostrado na Seção 4.5 as matrizes \hat{B} e \hat{D} são estimadas resolvendo-se um problema de mínimos quadrados.